TÉCNICA

ESTABELECIMENTO E INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ.

Physical establishment and interpretation of the Lorentz transformation.

M. ABREU FARO

INTRODUÇÃO AOS CONJUNTOS VAGOS.

Introduction to fuzzy sets.

ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA

EDUCATION AND RESEARCH IN MECHANICS IN THE FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY.

Ensino e investigação em mecânica na República Federal Alemã.

ERNST BECKER

CONTINUOUS HYDROLOGICAL TIME-SERIES DISCRETIZATION.

Discretização de séries hidrológicas contínuas.

LUÍS VALADARES TAVARES

MÁQUINA DE TURING PARA CONVERTER EXPRESSÕES EM NOTAÇÃO «INFIX» EM EXPRESSÕES EM NOTAÇÃO «POSTFIX» — II. ATRIBUIÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADO ENTRADA E SAÍDA.

Turing Machine for the translation from «infix» to «postfix» notation — II. State, input and output assignments.

L. T. MAGALHÃES
M. P. O. RICOU

O TRANSISTOR — REACTOR ATÓMICO.

The transistor — The atomic reactor.

BENJAMIN DA CONCEIÇÃO MENDONÇA

THE PERFORMANCE OF ACOUSTO-OPTIC CELLS FOR LASER-DOPPLER ANEMOMETRY.

Performance de células acusto-ópticas para a anemometria com Laser.

D. F. G. DURÃO
J. H. WHITELAW

associação dos estudantes do instituto superior técnico

fevereiro 1977

revista de engen

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

J. S. Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . 375$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 2.ª edição — 1970 . . (*)

C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . 180$00

TABELAS TÉCNICAS

Vicente e Eng.º Brasão Farinha, 8.ª edição — 1977 (*)

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 375$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 35$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 90$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 75$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brasão Farinha — 1.º VOLUME

Encadernado . . . . . 625$00

Plastificado . . . . . 587$50

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . (*)

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À técnica

técnica

NÚMERO 438 FEVEREIRO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
Delmar Baptista

COLABORADORES
António Maria da Fonseca
José Agostinho Marques
Jorge Braz
Armando Ruano
Manuel M. S. Anastácio
José Luis S. V. Azevedo
António Ricardo Pinto Gonçalves
Henrique José Carvalhão
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)

DIRECÇÃO REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	200$00	350$.
Países de língua Portuguesa e Espanha	220$00	380$.
Estrangeiro	—	450$.
Número avulso ...	—	60$.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO
COOP. ESPÍRITO SANTO, SCARL
Rua do Espírito Santo, 19-A - Odivelas

SUMÁRIO

283 — M. ABREU FARO — *Estabelecimento e interpretação física da transformação de Lorentz.*
Physical establishment and interpretation of the Lorentz transformation.

295 — ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA — *Introdução aos conjuntos vagos.*
Introduction to fuzzy sets.

311 — ERNST BECKER — *Education and research in mechanics in the Federal Republic of Germany.*
Ensino e investigação em mecânica na República Federal Alemã.

317 — LUÍS VALADARES TAVARES — *Continuous hydrological time-eries discretization.*
Discretização de séries hidrológicas contínuas.

325 — L. T. MAGALHÃES e M. P. O. RICOU — *Máquina de Turing para converter expressões em notação «infix» em expressões em notação «postfix» — II. Atribuição de variáveis de estado, entrada e saída.*
Turing Machine for the translation from «infix» to «postfix» notation — II. State, input and output assignments.

335 — BENJAMIM DA CONCEIÇÃO MENDONÇA — *O transistor — Reactor atómico.*
The transistor — The atomic reactor.

359 — D. F. G. DURÃO e J. H. WHITELAW — *The performance of acousto-optic cells for laser-doppler anemometry.*
Performance de células acusto-ópticas para a anemometria com Laser.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág
Fanafel	IV
MAGUE	III
Novobra, Lda.	IV
Sociedade Portuguesa Cavan	II
S. K. F., Lda.	I
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sopecate	II

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

AC-M-2

ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

ESTUDOS · PESQUISAS
CAPTAÇÕES

Prontos
para colaborar
na reconstrução
do País

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

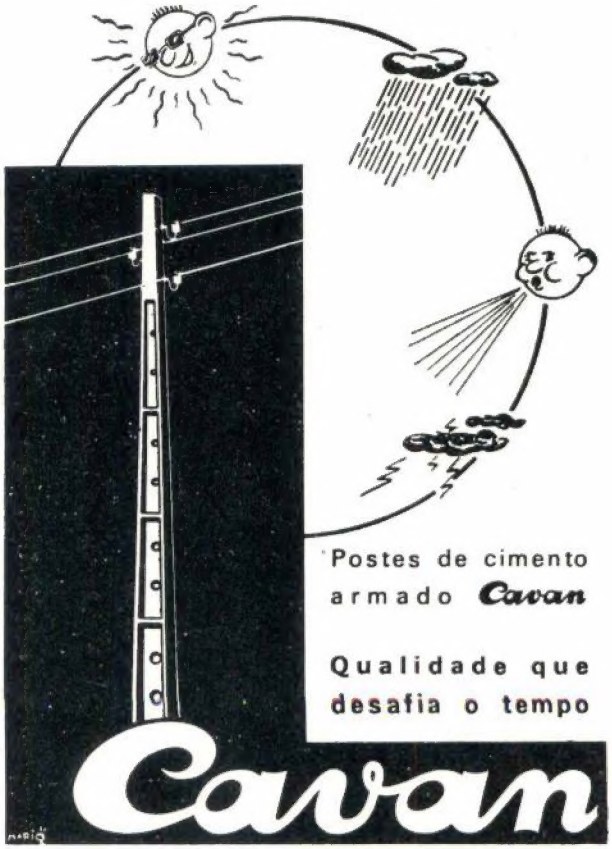
RUA RODRIGO DA FONSECA, 62 · LISBOA - 1
TEL. 56 11 71/4 · TELEX 12 476 ACAVAC P · TELEG. ACAVACO

FUNDAÇÕES ESPECIAIS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CAPTAÇÕES DE ÁGUA

Sopecate

ESPECIALISTA DESDE 1947

R. DO ARSENAL, 146 - 2°
Telf. 320208 - 364010 - 360437
LISBOA - 2



Postes de cimento
armado Cavan

Qualidade que
desafia o tempo

Cavan

Av. Visconde Valmor, 76-1.° - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

Já pensou...

... que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

técnica

REVISTA DE
ENGENHARIA

Avenida Rovisco Pais - Lisboa 1 - Telef. 72 93 23

técnica

NÚMERO 438 FEVEREIRO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C.D.U. 530.12:513.75/77

Estabelecimento e Interpretação Física da Transformação de Lorentz

M. ABREU FARO
Centro de Electrodinâmica (I.N.I.C.)
Universidade Técnica de Lisboa (I.S.T.)

SUMÁRIO

Procede-se neste trabalho ao estabelecimento e interpretação física da Transformação de Lorentz. Para tanto, recorremos aos dois postulados fundamentais da Relatividade Restrita e aos conceitos de velocidade e dessincronização.

Na base do método utilizado, a Transformação de Lorentz ganha significação física o que permite uma análise directa do seu formalismo e, decorrentemente, a sua escrita imediata a partir do significado alcançado.

Este é o segundo de três artigos que estamos a publicar na Técnica sobre a Transformação de Lorentz, sua interpretação física, e métodos geométricos para a determinação da referida transformação.

SUMARY

In this paper the establishment and the physical interpretation of the Lorentz Transformation is undertaken. To this end we have but used concepts of velocity and desynchronization and the two basic postulates of Special Relativity.

On the basis of the method used, the Lorentz Transformation gains physical significance, which allows a straightforward analysis of its formalism and, consequently, its immediate writing following the meaning arrived at.

This is the second of the three articles we are publishing in Técnica on the Lorentz Transformation, its physical interpretation and geometric methods to determine it.

1 — INTRODUÇÃO

A Transformação de Lorentz pode e tem sido estabelecida a partir de diversos métodos.

A cada método corresponde, em geral, uma determinada atitude, e, muitas vezes, uma finalidade bem definida.

Tratando-se da transformação de coordenadas que preside à Relatividade Restrita, é natural que de entre esses métodos existam aqueles que se filiam directamente nos dois postulados da Relatividade Restrita:

— Postulado de um Princípio de Relatividade Restrita, que traduz o facto experimental de as leis da Física serem as mesmas, em conteúdo e forma, para diversos referenciais mas restrito, na sua extensão, aos referenciais de inércia: qualquer um onde se verifique a Lei da Inércia e todos aqueles que em relação ao primeiro estejam em movimento rectilíneo e uniforme.

— Postulado da Invariância da Velocidade de Propagação da Luz no Vácuo, que traduz o facto experimental de a velocidade de propagação de qualquer sinal electromagnético, no vácuo, ser uma constante universal "c" para todos os referenciais de inércia.

Utilizaremos como fonte primeira os dois postulados da Relatividade Restrita.

Na Relatividade o espaço tem carácter relativo e apenas faz sentido falar do espaço relativo a um dado referencial S onde, um dado acontecimento, fica caracterizado por quatro coordenadas E (X, Y,,Z, T). Na Relatividade Restrita a geometria euclidiana é a que conduz à maior simplicidade de trato e tem a vantagem de nos manter conceitos da geometria dos corpos sóli-

dos. Por estes factos se adoptam coordenadas cartesianas ortogonais, melhor diriamos, euclidianas se em vez de T se considerar cT.

Reconhece-se que não é possível por uma experiência local individualizar qualquer ponto ou direcção do espaço relativo de um referencial pelo que o continuum espaço-tempo é aceite como homogéneo e isotrópico.

Posto isto, consideremos dois referenciais de inércia s (x, y, z, t) e S (X, Y, Z, T) em que o primeiro, e na perspectiva do segundo, se acha animado de movimento rectilíneo e uniforme de velocidade v.

Admitamos que um dado acontecimento E é assinalado no espaço relativo do referencial S pelas coordenadas

$$E_S \ (X, Y, Z, T)$$

Esse acontecimento também pertencerá ao espaço relativo de s onde é assinado por

$$E_s \ (x, y, z, t)$$

O problema fundamental consiste na determinação da lei de transformação

$$\begin{aligned} X &= X\ (x, y, z, t) \\ Y &= Y\ (x, y, z, t) \\ Z &= Z\ (x, y, z, t) \qquad (1) \\ T &= T\ (x, y, z, t) \end{aligned}$$

que permita para quaisquer valores (x, y, z, t) das coordenadas de um acontecimento, em s, determinar as coordenadas (X, Y, Z, T) do mesmo acontecimento, em S.

E também, como é óbvio, resolver o problema inverso.

Pelo primeiro postulado a transformação (1) deve ser linear.

Por outro lado e uma vez que o espaço-tempo é homogéneo não há perda de generalidade em arbitrar quaisquer pontos de S ou s como origens das coordenadas desses referenciais.

Sendo assim, podemos impor que as origens das coordenadas dos dois referenciais, s e S, assinalem um mesmo conhecimento.

Isto significa que, na transformação em causa, a

$$X = Y = Z = o \quad e \quad T = o$$

corresponde

$$x = y = z = o \quad e \quad t = o$$

Arbitrando assim, a transformação, que já se viu ser linear, é também homogénea.

Uma vez que o espaço relativo de qualquer referencial é isotrópico, a orientação dos eixos pode ser qualquer e assim admitiremos que para T = t = o os eixos espaciais dos dois referenciais estão apostos e dirigidos segundo os mesmos sentidos, respectivamente.

Em seguida, podemos orientar o eixo dos XX de modo a que a origem das coordenadas espaciais de s, x = y = z = o, seja vista mover-se sobre o eixo dos XX com a velocidade v.

A partir daqui, recorrendo uma vez mais ao primeiro postulado e isotropia do espaço, é fácil demonstrar que a transformação pretendida se reduz à forma:

$$\begin{aligned} X &= Ax + Bt \\ T &= Bx + Ct \\ Y &= y \qquad (2) \\ Z &= z \end{aligned}$$

A lei de transformação que resulta para as coordenadas reveste uma forma especial directamente ligada à orientação relativa que se adoptou para os eixos e origem das coordenadas arbitradas, por isso se diz Transformação Especial de Lorentz.

Será a partir de (2) que actuaremos e os nossos objectivos fundamentais são dois:

— Estabelecimento da Transformação de Lorentz

— Interpretação física da Transformação de Lorentz, a partir do método utilizado para o seu estabelecimento e dos conceitos de velocidade relativa e dessincronização relativa.

Atingidos os objectivos visados, apresentaremos um exemplo onde se esclarece quanto anteriormente se expôs.

2 — ESTABELECIMENTO DA TRANSFORMAÇÃO ESPECIAL DE LORENTZ

Como se disse, com generalidade e por simples recurso aos dois postulados, é possível determinar completamente a Transformação de Lorentz.

Para atingir os objectivos que visamos utilizaremos um procedimento diverso.

Assim, abandonamos a generalidade para passarmos a considerar uma situação concreta da qual resultará uma transformação unívoca de coordenadas. Uma vez que nessa situação se actuará em conformidade com os dois postulados, a transformação obtida é, como seria de esperar, a Transformação Especial de Lorentz, uma vez que o estabelecimento é válido para quaisquer valores das coordenadas.

Antes de mais e como resulta de (2) a transformação especial deixa invariantes as coordenadas ortogonais à direcção da velocidade v e resume-se à forma simples:

$$X = Ax + Bt \qquad (3\ a)$$

$$T = Cx + Dt \qquad (3\ b)$$

que correlaciona entre si as coordenadas segundo a direcção de v e os tempos t e T dos dois referenciais.

Vê-se, desde já, que o tempo perde o carácter absoluto que tinha na Transformação de Galileu.

Recorrendo a uma onda electromagnética plana podemos, num dado referencial, definir geometricamente acontecimentos simultâneos. Isto é, traçar lugares geométricos de acontecimentos simultâneos e de tempo T em relação à origem das coordenadas:

$$X = Y = Z = o \quad e \quad T = o.$$

Adivinhando-se dificuldade no estabelecimento dessa onda e sua utilização, poderíamos emitir no instante $T = o$, e a partir de um plano espacial de referência, sinais electromagnéticos segundo a normal positiva do plano.

Esses sinais existem num plano que, com este esclarecimento e a partir daqui, designaremos por frente de onda.

Consideremos a fig. - 1 onde, em relação ao referencial S (X, Y, Z, T), se ilustra a definição geométrica de lugares de $T = \text{const.}$

Na figura indicam-se, de entre outros, dois procedimentos possíveis. No primeiro, utiliza-se uma onda plana com a normal de onda dirigida segundo o sentido positivo do eixo do YY. Então, e de acordo com o princípio de invariância da velocidade de propagação dos sinais electromagnéticos, a frente de onda, lugar geométrico dos sinais emitidos, caminha a partir de $Y = o$ e durante o intervalo de tempo

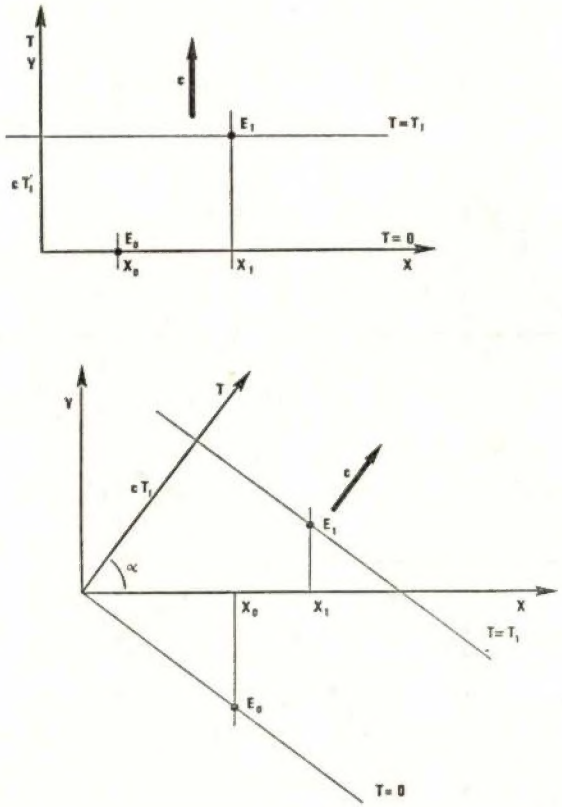


FIG. 1 — Dois procesoss de estabelecer lugares geométricos de tempo constante a partir de sinais electromagnéticos

$$T_1 - T_0 = T_1$$

$$T_0 = o$$

uma distância

$$cT_1$$

Para $T_0 = o$ essa superfície de onda coincidia com o plano de referência $Y = o$

Sendo assim, um acontecimento E_1 localizado no plano XY, $Z = o$, tem por coordenadas

$$E_1 (X_1, Y_1, o, T_1)$$

$$Y_1 = cT_1 \tag{4}$$

E_0, por exemplo, é um acontecimento de coordenadas

$$E_0 (X_0, o, o, o)$$

uma vez que corresponde a $T_0 = o$

Para o que se pretende basta-nos o plano XY pelo que passaremos a considerar a intersecção da superfície de onda com o plano $Z = o$. Isto significa que a recta

$$Y = cT_1$$

$$Z = o$$

traduz um lugar geométrico de acontecimentos ocorrendo no tempo T_1 e localizados no plano XY.

No segundo procedimento utiliza-se uma onda plana com a normal dirigida segundo a direcção α.

Nesta representação, E_1 é um acontecimento de coordenadas

$$E_1 (X_1, Y_1, o, T_1)$$

$$Y_1 = \frac{cT_1 - \cos \alpha X_1}{\text{sen } \alpha} \tag{5}$$

Y_1 obtém-se facilmente a partir da projecção de OX_1E_1 sobre o eixo dos TT.

As cordenadas do acontecimento E_0 correspondente a $T_0 = o$ serão, de acordo com (5),

$$E_0 (X_0, Y_0, o, o)$$

$$Y_0 = -\frac{X_0 \cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = -\frac{X_0}{\tan \alpha}$$

Fica deste modo estabelecido um processo de obter lugares geométricos de tempo constante, a partir do recurso a «ondas planas».

Uma vez que a partir daqui apenas usaremos o plano dos XY no referencial S e o plano dos x y no referencial s as frentes de onda serão linhas rectas.

Posto isto, estamos em condições de actuar em relação à seguinte situação:

No referencial s (x, y, z, t) estabelece-se uma onda plana com a normal de onda dirigida segundo a direcção e sentido positivo do eixo dos yy. Mais concretamente, uma linha recta que para $t = 0$ coincide com $y = 0$.

Para $t = 0$, a frente de onda que se estabeleceu acende, na origem das coordenadas desse referencial, uma lâmpada que permanece acesa.

Ao fim de um tempo t essa frente de onda atingiu o plano $y = ct$ e na sua progressão vai acendendo lâmpadas colocadas uniformemente ao longo do eixo dos yy, lâmpadas que após uma breve emissão de luz se apagam.

À lâmpada colocada na origem das coordenadas corresponde uma sucessão contínua de acontecimentos de coordenadas

$$E_s\ [o, o, o, t]$$

e em que o acender da lâmpada corresponde a $t = o$.

Esta lâmpada é pois uma marca «espacial» da origem das coordenadas, $x = y = z = o$, que resta assinalada para todo o tempo $t > o$.

Ao acender de cada uma das outras lâmpadas, colocadas no eixo dos yy correspondem acontecimentos de coordenadas

$$E_s\ [o, ct, o, t]$$

A cada t corresponde uma lâmpada, aquela que se situa à distância $y = ct$ da origem.

Teremos, neste caso, um sinal luminoso que percorre o eixo dos yy com velocidade relativa c, velocidade da frente de onda que comanda o acender de cada uma das lâmpadas.

Estabeleceu-se assim no eixo dos yy um indicador do tempo t do referencial s, tempo relativo à origem dos tempos $t = o$.

Nos termos do primeiro processo descrito e representado na fig. 1, as rectas $y = ct$ são lugares geométricos de acontecimentos de tempo constante.

De acordo com o segundo postulado, a onda electromagnética estabelecida, em s, é também, em S, uma onda electromagnética propagando-se com a velocidade c relativa a este referencial.

Na fig. 2, no alto e à esquerda, representa-se o que em S se observará:

De acordo com o conceito de velocidade relativa a lâmpada que assinala a origem «espacial» de s desloca-se ao longo de X com velocidade v.

De acordo com o segundo postulado o sinal luminoso correspondente às lâmpadas situadas em y, é observado em S como um sinal luminoso com velocidade «c» que durante o tempo T se deslocou a partir da origem de uma distância cT e segundo uma direcção α, a determinar.

Comparemos as coordenadas dos dois acontecimentos. De acordo com o que se disse:

À lâmpada na origem $x = y = z = o$, e no tempo t, corresponde $E_s\ (o, o, o, t)$.

À lâmpada em $x = z = o$, em $y = ct$, e no tempo t, corresponde $E_s\ [o, ct, o, t]$.

Chega-se assim à conclusão que estes acontecimentos têm iguais coordenadas, $(x) = o$ e $(t) = t$, pelo que, de acordo com a forma particular da Transformação Especial:

$$X = Ax + Bt \qquad (3\ a)$$

$$T = Cx + Dt \qquad (3\ b)$$

lhes correspondem, em S, acontecimentos com iguais X e T.

Para o tempo T, e em S, à lâmpada que no instante t se encontra acesa em $y = ct$, corresponde um acontecimento afastado cT da origem, segundo uma direcção α, e com uma abcissa $X = vT$, uma vez que esta é abcissa da lâmpada na origem, $x = y = z = 0$, e se demonstrou que estes dois acontecimentos têm iguais coordenadas X e T.

É o que se representa, no alto e à esquerda na fig. 2, e daí se conclui que

$$\cos \alpha = \frac{v}{c}$$

A partir daqui podemos utilizar a onda electromagnética estabelecida em s, e tal como é vista em S, para definir lugares geométricos de tempo constante T nos termos do segundo procedimento representado na fig. 1.

Esses lugares geométricos serão rectas ortogonais à direcção α, o que resulta da conjugação do segundo postulado com o facto das transformações serem lineares.

Por outro lado, e uma vez que na transformação em causa as distâncias segundo direcções ortogonais à da velocidade ficam invariantes, segue-se que uma recta xy, $z = o$, lugar geométrico de tempo constante $y = ct$ é observada em S segundo uma recta em XY, $Z = o$, de equação

$$Y = y = ct$$

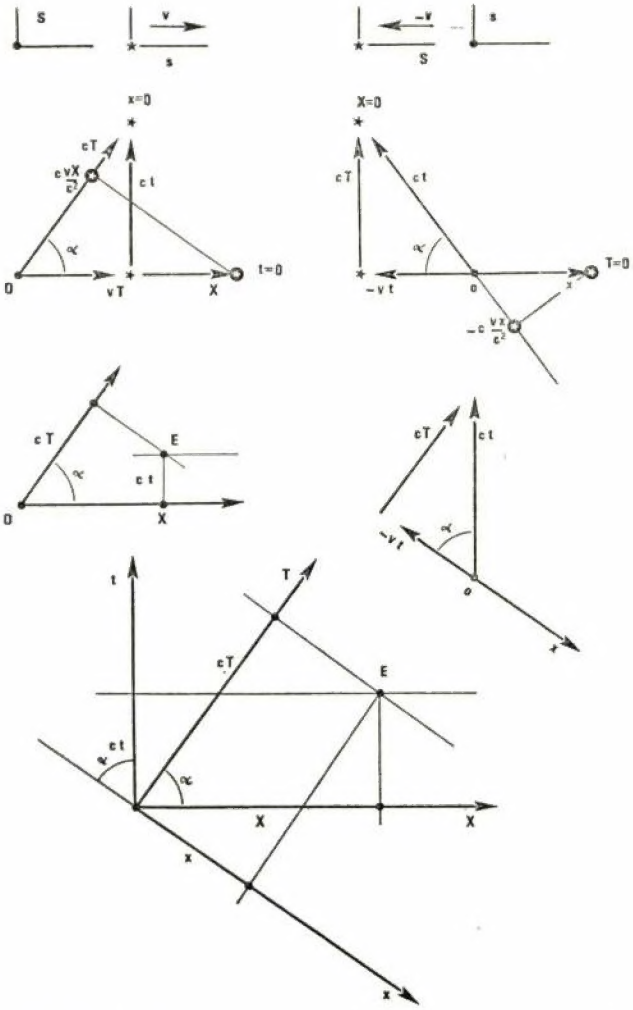


FIG. 2 — Estabelecimento da Transformação de Lorentz a partir do conceito de velocidade relativa e dos dois postulados da Relatividade Restrita

Mas sendo assim, só haverá um valor para a coordenada X de dois acontecimentos com tempos t e T nos referenciais s e S, respectivamente.

Tudo isto se representa no segundo desenho, a contar do alto e à esquerda, da fig 2.

A determinação de X é imediata, basta projectar a linha quebrada OXE sobre o eixo dos TT, obtendo-se:

$$cT = X \cos\alpha + ct \operatorname{sen}\alpha$$

de onde resulta:

$$X = \frac{cT - ct \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad (6)$$

em que

$$\cos\alpha = \frac{v}{c}$$

Na fig. 2, ao alto e à direita, representa-se outra experiência, idêntica à que se descreveu.

Nesta, a onda electromagnética é estabelecida em S com a normal de onda dirigida segundo o eixo dos YY e aproveitada depois para definir lugares geométricos de tempo constante em s.

Seguindo a mesma via chegava-se à conclusão que a variável x ficava determinada pela relação

$$x = \frac{ct - cT \operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}$$

em que (7)

$$\cos\alpha = \frac{v}{c}$$

Esta relação seria de esperar e está em directa concordância com o Princípio de Relatividade.

De facto, na primeira experiência era s que, na perspectiva de S, estava animado de movimento relativo e uniforme de velocidade v.

Pelo primeiro postulado é igualmente legítimo dizer-se que, na perspectiva de s, é S que está animado de movimento relativo e uniforme de velocidade (− v).

Sendo assim, seria de esperar que a uma relação

$$X = F\ (T,\ t,\ v)$$

em S, correspondesse, em s, uma relação

$$x = F\ (t,\ T,\ -v)$$

Note-se que na segunda experiência o ângulo entre as direcções e sentidos positivos de x e t é $\alpha' = \pi - \alpha$ pelo que:

$$\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha = -v/c$$

É o cosseno, função impar de v, que troca de sinal quando v passa a (− v).

A partir das relações obtidas:

$$X = \frac{cT - ct \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad (8\ a)$$

$$x = \frac{ct - cT \operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} \qquad (8\ b)$$

imediatamente se obtém:

$$X = \frac{x + ct \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (9\ a)$$

$$cT = \frac{ct + x \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (9\ b)$$

como se obteria:

$$x = \frac{X - cT \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (10\ a)$$

$$ct = \frac{cT - X \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (10\ b)$$

Exprimindo sen α e cos α em v/c

$$\cos\alpha = \frac{v}{c}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (11)$$

poderemos ainda escrever:

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ (x + vt) \qquad (12\ a)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ \left(t + \frac{v}{c^2}\ x\right) \qquad (12\ b)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ (X - vT) \qquad (13\ a)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ \left(T - \frac{v}{c^2}\ X\right) \qquad (13\ b)$$

que, com as relações,

$$Y = y$$

$$Z = z$$

traduzem, como é bem conhecido, a Transformação Especial de Lorentz.

Obtém-se, deste modo, o resultado que se esperava.

Prosseguindo, e em directa relação com a fig. 2, verifica-se que, rodando a representação correspondente à segunda experiência, as duas representações se casam consistentemente e conduzem à figura, em baixo e ao centro, onde o acontecimento

E

de tempos relativos t e T abcissa relativa X tem uma representação, na primeira experiência, que coincide com a representação associada à segunda experiência em que o mesmo acontecimento de tempos relativos t e T é assinalado na abcissa relativa x.

Da reunião das duas figuras resulta a sobreposição dos lugares geométricos, de t e T constantes, associados a cada uma das experiências, pelo que fica estabelecido um processo geométrico de obter as transformações

$$[x, t] \rightleftarrows [X, T]$$

Na fig. 3, mostram-se as representações que resultam para a resolução dos seguintes problemas

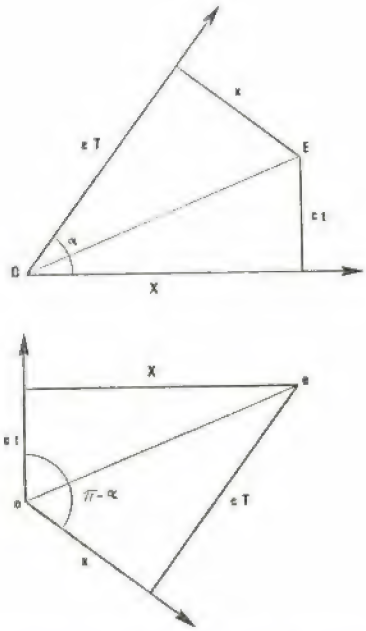


FIG. 3 — Geometria associada ao método utilizado. Ressalta de qualquer das figuras, a Invariância da Forma Quadrática Fundamental

— Conhecidos [X, T] determinar [x, t]

— Conhecidos [x, t] determinar [X, T]

α traduz a direcção α associada à 1.ª experiência ($\pi - \alpha$) traduz a direcção ($\pi - \alpha$) associada à 2.ª experiência.

Destas figuras resulta imediatamente:

— Da primeira:

$$c^2\ T^2 + x^2 = X^2 + c^2\ t^2$$

— Da segunda:

$$c^2\ t^2 + X^2 = x^2 + c^2\ T^2$$

São relações idênticas que associadas a

$$Y = y$$

$$Z = z$$

traduzem a invariância da Forma Quadrática Fundamental:

$$(x^2 + y^2 + z^2) - c^2\ t^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) - c^2\ T^2 \qquad (15)$$

Posto isto estamos em condições de passar à interpretação física da Transformação de Lorentz.

3 — INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Consideremos a fig. 2 onde se representam as duas experiências que nos conduziram à Transformação Especial de Lorentz.

Como se salientou recorreu-se, então, ao conceito de velocidade relativa o que, em última análise, significa dizer que no referencial S a origem das coordenadas espaciais de s se desloca com velocidade v, medida através de adequados registos em X e em T.

Este conceito é, em certa medida, o que assiste à Transformação de Galileu. Está certo mas não é tudo.

Na realidade, pode pôr-se questão semelhante em relação à origem da coordenada tempo do referencial s.

Para analisar este assunto, admitamos que no referencial S uma recta de tempo constante comanda sobre o eixo dos TT e sobre o eixo dos XX o acender de lâmpadas que lá se imaginam dispostas e com densidades tais que podemos admitir que no eixo dos TT e correspondente ponto do eixo dos XX existem lâmpadas que se acendem simultaneamente sempre que a frente de onda por elas passa.

Atendendo a que

$$\cos \alpha = v/c$$

imediatamente se conclui da figura que essa frente de onda, ver a fig. 2, põe em correspondência a abcissa X com um tempo

$$\frac{v}{c^2}\ X$$

Deste modo, e de acordo com a definição de rectas de tempo, o primeiro sinal luminoso, sucessão de lâmpadas que se acendem, progride no eixo dos TT com velocidade c.

Em contrapartida o sinal luminoso no eixo dos XX progride com velocidade

$$X / \frac{v}{c^2}\ X = \frac{c^2}{v} > c$$

Esta velocidade, maior do que c, provém de lâmpadas independentes que se acendem sob o comando de uma frente de onda que se desloca com velocidade c segundo a sua normal de onda e que pela inclinação α deste com o eixo dos XX corta este eixo em pontos que se deslocam com a velocidade

$$\frac{c}{\cos \alpha} = \frac{c}{\frac{v}{c}} = \frac{c^2}{v}$$

Trata-se de um artifício em relação a fontes independentes que não contraria, portanto, o segundo postulado.

Posto isto, notemos que o eixo dos XX coincide com uma recta de tempo t constante. Mais precisamente, $t = 0$.

Isto significa que ao acender da lâmpada na abcissa X corresponde, em s, um acontecimento de coordenadas

$$E_s\ (x, o, o, o)$$

Em S esse mesmo acontecimento tem por coordenadas

$$E_S\left(X, o, o, \frac{v}{c^2} X\right)$$

Isto é, para $x = o$ e $t = o$ tínhamos

$$X = o \quad e \quad T = o$$

enquanto que para $x \neq o$ e $t = o$ temos

$$X \neq o \quad e \quad T = \frac{v}{c^2} X$$

Conclui-se daqui que a origem do tempo de s, $t = o$, se separa de $T = o$, e ao longo de X. Essa separação, medida em S, é dada por:

$$T - o = T = \frac{v}{c^2} X$$

Definiremos como dessincronização a variação de tempo por unidade de comprimento.

A dessincronização relativa da origem do tempo de s, $t = o$, será então

$$d = \frac{v}{c^2} X/X = \frac{v}{c^2} \qquad (16)$$

e tem, como é evidente, as dimensões do inverso de uma velocidade.

Para a outra experiência, S em movimento e s fixo, seria o mesmo, apenas se observaria uma mudança de sinal para a dessicronização que passaria a ser

$$-\frac{v}{c^2} \qquad (17)$$

Do que se disse podemos inferir, em última análise, o seguinte:

— É tão legítimo dizer que um referencial está animado de velocidade relativa v em relação a outro, como dizer que está animado de dessincronização relativa $d = \frac{v}{c^2}$ em relação a esse outro referencial.

— Na Transformação de Galileu e para a velocidade relativa v não havia a contrapartida da dessincronização relativa d. Na realidade, a dessincronização era nula o que conferia carácter absoluto ao tempo.

— Na Transformação de Lorentz os dois conceitos coexistem e só por experiências particulares que fixem um ponto do espaço $x = x_0$, ou um instante do tempo $t = t_0$ se pode evidenciar, respectivamente, uma velocidade relativa pura e uma dessincronização relativa pura.

— De um modo geral a origem das coordenadas de s separa-se, no espaço e no tempo, da origem das coordenadas de S:

No espaço, com velocidade v ao longo da tempo T.

No tempo, com dessincronização d ao longo do espaço X.

— Sendo assim, é de esperar que a um acontecimento E com coordenadas, em s.

$$E_s\ (x, t)$$

corresponda um acontecimento, em S, com coordenadas

$$E_S\ (X, T)$$

em que X seja dado por

$$X = vT + K_x\ x \qquad (18\ a)$$

e T dado por

$$T = \frac{v}{c^2} X + K_t\ t \qquad (18\ b)$$

— vT traduz o que em X, e ao longo de T, a origem $x = o$ se deslocou.

— $\frac{v}{c^2} X$ traduz o que, em T, e ao longo de X, a origem $t = o$ se separou no tempo.

— $K_x x$ e $K_t t$ representam a contribuição respectivamente para X e T das coordenadas x e t.

— Na Transformação de Galileu $K_x = K_t = 1$ e $v/c^2 = o$; tudo se passava como se existisse uma via física de conciliar os dois referenciais e a que correspondesse $c = \infty$.

— Na Transformação de Lorentz e dada a similitude de trato que confere ao espaço e ao tempo será de esperar que

$$K_x = K_t = K = f\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (19)$$

De $\frac{v^2}{c^2}$, dada a isotropia do espaço-tempo.

— Tudo isto está claramente evidenciado na fig. 4 de onde se conclui, imediatamente, que:

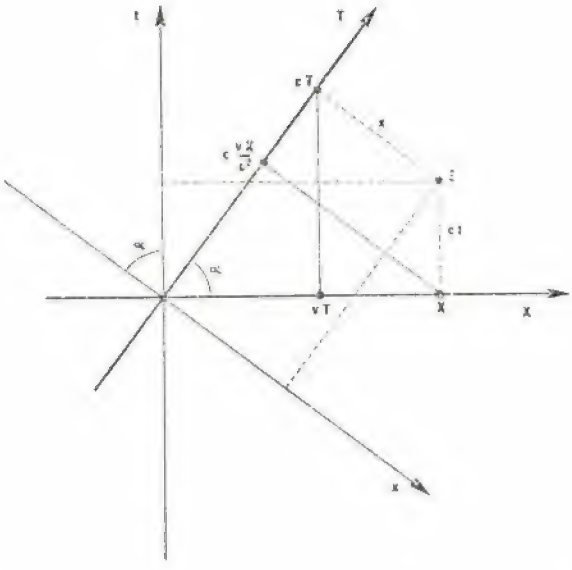


FIG. 4 — Interpretação da Transformação de Lorentz a partir dos conceitos de velocidade relativa e dessincronização relativa

$$K = K_x = K_t = \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (20)$$

— Este último resultado encerra, em si, e por conveniente interpretação, os conhecidos efeitos relativísticos da «contracção das dimensões segundo a direcção do movimento» e «dilatação do tempo», mas disso não nos ocuparemos aqui.

— Apenas nos interessa salientar que às separações no espaço e no tempo há que juntar as projecções sobre os respectivo eixo, e na orientação implícita no método que se utilizou, da coordenada x e da coordenada t.

— Por essa projecção as coordenadas x e t refletem-se em X e T através do mesmo coeficiente

$$K = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Conclusão:

Tendo em consideração o exposto e com a significação adquirida, as Transformações de Lorentz escrevem-se imediatamente:

$$X = vT + \sqrt{1 - v^2/c^2}\;x \qquad (21\ a)$$

$$T = \frac{v}{c^2}X + \sqrt{1 - v^2/c^2}\;t \qquad (21\ b)$$

e reciprocamente

$$x = -vt + \sqrt{1 - v^2/c^2}\;X \qquad (22\ a)$$

$$t = -\frac{v}{c^2}x + \sqrt{1 - v^2/c^2}\;T \qquad (22\ b)$$

De (22 a) e (22 b) resulta:

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x + vt) \qquad (23\ a)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t + \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (23\ b)$$

De (21 a) e (21 b) resulta

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(X - vT) \qquad (24\ a)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(T - \frac{v}{c^2}X\right) \qquad (24\ b)$$

que são as formas usuais que a Transformação Especial de Lorentz reveste.

4 — EXEMPLO

Consideramos de interesse ilustrar com um exemplo aquilo que se expôs relativamente ao estabelecimento da Transformação de Lorentz e sua interpretação física.

No alto da fig. 5 representa-se, no referencial s, as seguintes sequências de acontecimentos:

— Nos pontos 1, 2, 3 localizadas sobre o eixo dos xx acenderam-se, durante um intervalo de tempo muito curto, três lâmpadas.

Acendem-se simultaneamente no instante $t = o$.

— Seguidamente, a lâmpada situada em 3 torna a acender-se no instante t_1 e uma vez mais no instante $t_2 = 2\,t_1$.

— Para qualquer destes acontecimentos $y = o$ pois as lâmpadas localizam-se no eixo dos xx. Como as representações de $y = o$ coincidem com as de $t = o$ esses pontos têm um quadrado sobreposto.

— Uma vez que nos situamos no plano dos xy será, para qualquer acontecimento, $z = o$.

— Portanto, as coordenadas dos acontecimentos referidos são:

E_1 [o, o, o, o] E_2 [x_2, o, o, o] E_3 [x_3, o, o, o]

E_4 [x_3, o, o, t_1] E_5 [x_3, o, o, t_2]

— Além destes, outros acontecimentos se passaram. Assim, uma frente de onda de normal dirigida segundo o eixo dos yy vai progredindo com velocidade c e acendendo nos instantes t_1, t_2, t_3 etc., lâmpadas situadas no eixo dos yy.

As unidades de espaço e tempo são tais que conduzem a $c = 1$, pelo que os pontos figurativos de y coincidem com os de t. Esse facto vai assinalando, também, por um quadrado.

— Sendo assim, rectas ortogonais ao eixo dos yy traduzem lugares geométricos de tempo constante:

Por 3 passa a recta $y = o$

Por 4 passa a recta $y = ct_1$

Por 5 passa a recta $y = ct_2$

Posto isto consideremos o referencial S onde se observa o referencial s em movimento rectilíneo e uniforme de velocidade $v = 0{,}6$ c.

Aplicando a Transformação Especial de Lorentz obtêm-se facilmetne as coordenadas desses acontecimentos no referencial S. É o que se representa na parte inferior da fig. 5.

O desenho vai feito à escala e é fácil comprovar a situação dos pontos, ou seja as suas coordenadas.

Analisemos agora o que se observa em S:

— Ao longo de uma linha quebrada e designada por T indicam-se as coordenadas (X, T) dos acontecimentos E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5, em S.

— Ao longo do eixo dos X e numa sequência de estrelas brancas assinalam-se as coordenadas (X, Y) dos mesmos acontecimentos.

— A sequência T_1 T_2 T_3 traduz as coordenadas (X, T) dos acontecimentos ocorrendo em y_1, y_2, y_3.

— A sequência Y_1 Y_2 Y_3 mostra-nos os locais onde as lâmpadas colocadas em y_1 y_2 y_3 se vêem acender em S, trata-se de uma representação em (X, Y).

— As rectas ortogonais ao eixo dos T, ou Y traduzem rectas de tempo constante T. As coordenadas dessas rectas, que não se representaram, são cT_1, cT_2, cT_3.

— Mas de acordo com o segundo procedimento considerado na fig-1, a recta dos Y_1 Y_2 Y_3 pode constituir-se num eixo dos tempos T, direcção AB, e as rectas AD e BE, ortogonais a AB, são então, e também, rectas de tempo constante T.

— Note-se que as distâncias:

OY_1, OY_2, OY_3, ...

coincidem com as ordenadas

cT_1, cT_2, cT_3, ...

— Note-se que OBEDO é exactamente a relação geométrica que aparece na fig. 3, ao alto, e mais pormenorizadamente na fig. 4.

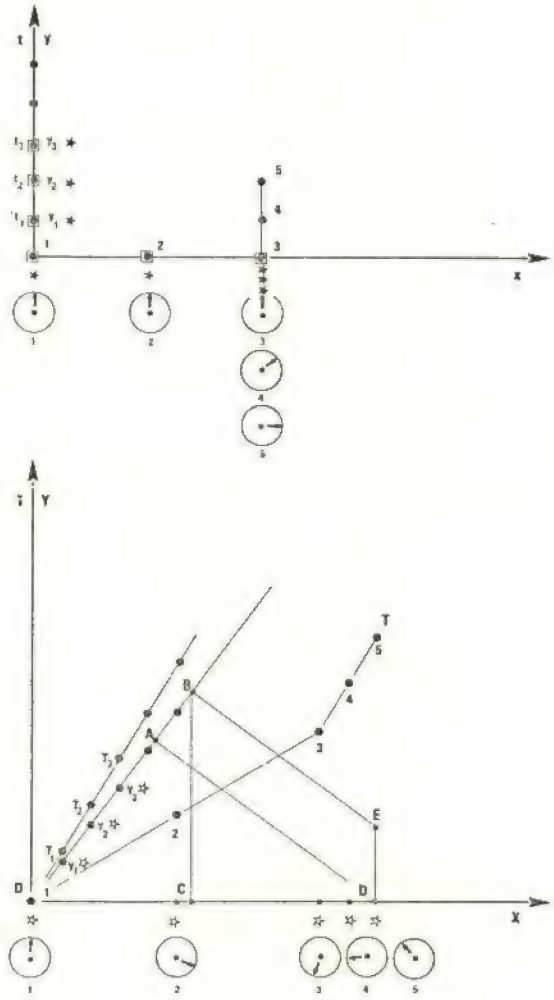


FIG. 5 — Sequências de acontecimentos e sua representação coordenada nos referenciais s e S

— Sendo assim, e em relação ao acontecimento E_5:

$OB \equiv cT$, ordenada de 5 no plano (X, T)

$OD \equiv X$

$ED \equiv ct$

$BE \equiv x$ abcissa de 3, em s, e também de 4 ou 5

$$OA \equiv \frac{v}{c^2} X$$

$OC \equiv vT$

— Assim se verifica claramente a teoria do método que se apresentou.

Finalmente, interpretamos à luz do que se expôs, a fenomenologia observada em S.

— Três acontecimentos em s, $t = o$, são vistos em S, nos tempos assinalados pelas ordenadas de 1, 2 e 3, mais sugestivamente assinalados nos relógios.

— A velocidade do sinal luminoso segundo X é 1/d

$$\frac{c^2}{v}$$

É o fenómeno puro da dessincronização relativa.

— Três acontecimentos em s, e com $x = o$, têm as suas abcissas em S deslocando-se com velocidade v, abcissas de Y_1 Y_2 Y_3.

É o fenómeno puro da velocidade relativa.

— À sequência 3, 4, 5, em s, e que traduz variação no tempo, em s, para $x =$ conste. corresponde uma dilatação do tempo, em S, através de um factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

— A distância $BE = x$, projecta-se em S e na sua contribuição para x, através de um factor de redução

$$K = K_x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

— O tempo $DE = ct$, projecta-se em S e na sua contribuição para T, através de um factor de redução

$$K = K_t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

— Estes dois factos foram devidamente assinalados na interpretação da Transformação de Lorentz.

A figura, devidamente interpretada, revela ainda outros factos mas julgamos que estes que se referiram são os mais importantes.

5 — CONCLUSÃO

— A partir da interpretação feita tem significado escrever directamente:

$$X = vT + \sqrt{1 - v^2/c^2}\ x$$

$$T = \frac{v}{c^2} X + \sqrt{1 - v^2/c^2}\ t$$

— Interpretando assim, é fácil escrever a Transformação de Lorentz para outra orientação de eixos ou outras origens das coordenadas. Bastará atender ao significado intrínseco da transformação em que X e x representam distâncias medidas segundo a direcção da velocidade, v, e T e t representam os tempos dos referenciais S e s.

— As distâncias ortogonais à direcção da velocidade, v, ficam invariantes.

— Na referida escrita está implícita a separação vT que a Transformação de Galileu contemplava, e figura, e adquire naturalidade, a separação $\frac{v}{c^2} X$.

— A estas separações estão associados dois conceitos: o de velocidade e o de dessincronização.

— Para $v = o$ obtemos a transformação unidade

$$X = x$$

$$T = t$$

o que, pela velocidade ser nula, traduz a imobilidade relativa no espaço e, de acordo com a geometria dos sólidos, que

$$X = x$$

Também, e pelo facto da dessincronização ser nula, traduz que

$$T = t$$

o que significa um tempo comum aos dois referenciais e encerra, em si, o conceito de simultaneidade, só aplicável a acontecimentos do mesmo referencial, conceito a partir do qual faz sentido falar do tempo de um referencial e da existência de relógios síncronos que, em cada lugar, o indicam.

— No âmbito de uma Teoria de Sistemas

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

traduz, em certa medida, um factor físico de ligação.

Quando $v = c$ os dois sistemas ficam desligados e, para qualquer x ou t, teremos:

$$X = cT$$

$$T = \frac{X}{c}$$

o que significa que x e t têm projecção nula em S.

A relação

$$X = cT$$

condiciona as coordenadas da origem de s, em S.

Assim, os acontecimentos do espaço relativo de s passam todos a situar-se, em S, em planos ortogonais ao eixo dos XX, satisfazendo as suas coordenadas às relações:

$$X = cT, \quad \text{para qualquer x ou t}$$

$$T = \frac{X}{c}, \quad \text{para qualquer x ou t}$$

$$Y = y$$

$$Z = z$$

Evidentemente, que outras interpretações são possíveis, mas estas, que nos parecem fundamentais, são aquelas que nos vêm da significação que emerge da Transformação de Lorentz quando escrita:

$$X = vT + \sqrt{1 - v^2/c^2}\ x$$

$$T = \frac{v}{c^2} X + \sqrt{1 - v^2/c^2}\ t$$

BIBLIOGRAFIA

ABREU FARO, M. — «Método geométrico de obtenção das Transformações de Lorentz. Propriedades do método e suas aplicações». Academia de Ciências de Lisboa, Classe de Ciências. Comunicação de 6 de Maio de 1976.

ABREU FARO, M. — «A Geometrical and Mechanical Method to Determine Lorentz Transformations». Técnica, 436 (1976).

AHARONI, J. — «The Special Theory of Relativity». Clarendon Press, Oxford (1965).

PANOFSKY-PHILIPS — «Classical Electricity and Magnetism», Addison-Wesley P. C., London (1969).

PROKHOVNIK, S. J. — «The Logic of Special Relativity». Cambridge University Press, Cambridge (1967).

DA SILVEIRA, A. — «Teoria da Electricidade — Campo Electromagnético». Lisboa (1948).

TONNELAT, M. A. — «Histoire du Principe de Relativité». Flamarion, Paris (1971).

MAGUE

«1 dos 6 Guindastes de 15 t×30 m/4,5 t×65 m em serviço nos Estaleiros Navais da SETENAVE em Setúbal».

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS MAGUE S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

TELEF. 5 20 91/2/3 — OVAR - PORTUGAL — TELEG. FELTROS

FELTROS TECIDOS

TECIDOS FILTRANTES E INDUSTRIAIS

de fibras naturais ou sintéticas, puras ou em mistura
em qualquer formato e dimensão
para

Indústria papeleira
Pastas para papel
Fibrocimento
Curtumes
Industriais têxteis
Estamparia
Acabamentos
Lavandarias
Hospitais e Hotéis
Lonas em sintético

Correias transportadoras
Indústrias químicas
Filtração de água
Cervejas
Refrigerantes
Lacticínios
Azeite e produtos oleosos
Produtos gordurosos
Geleias

Vinhos
Açúcar
Farinhas alimentares
Sabões e detergentes
Cerâmicas
Captação e recuperação de poeiras
Despoeiragens
Tubos de ventilação
etc., etc., etc.

OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS ESTÃO SEMPRE À VOSSA INTEIRA DISPOSIÇÃO
PARA ESTUDAR QUALQUER PROBLEMA DE TECIDOS INDUSTRIAIS

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão

MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda, Moita, Luanda e Lourenço Marques
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. – Lisboa 5
Telefones–Serviços Administrativos: 77 48 32-77 29 53 · Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8-71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

MEXIA HEITOR E BRASÃO FARINHA

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

TECNICA
revista da associação dos estudantes do Instituto Superior Técnico
LISBOA

C.D.U. 519.51

"Introdução aos conjuntos vagos"(*) (continuação)

António Gouvêa Portela
Prof. Catedrático I. S. T.

CAPÍTULO 5

RELAÇÕES BINÁRIAS

5.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Se $X \equiv Y \equiv$ então $X \times Y = \mathcal{U} \times \mathcal{U} = \mathcal{U}^2$ e $\mathcal{U}^2$ será o conjunto referencial. De novo (Ω, ∇, Δ) seja um reticulado e $\mathbf{J}$ a família das aplicações funcionais de $\mathcal{U}^2$ em Ω.

As principais propriedades que podem possuir as Relações Binárias são:

5.1.1 *SIMETRIA*

Se $\forall\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2\ J_A\ (u_1, u_2) = J_A\ (u_2, u_1)$ então A é uma relação simétrica.

5.1.2 *REFLEXIVIDADE*

Se $\forall\ (u, u) \in \mathcal{U}^2$ for $J_A\ (u, u) = 1$ então A é uma relação reflexiva (repare-se que não basta ser $J_A\ (u, u) > 0$).

5.1.3 *TRANSITIVIDADE (DIRECTA)*

Se $\forall\ (u_1, u_2),\ (u_2, u_3) \in \mathcal{U}^2$ for

$$\nabla \left\{ J_A\ (u_1, u_3),\ \underset{u_j}{\nabla} \left[\Delta \left(J_A\ (u_1, u_j\ ),\ J_A (u_j\ , u_3) \right) \right] \right\} = J_A\ (u_1, u_3)$$

então A é uma relação transitiva.

Note-se que a transitividade se testa pela composição de A o A; com efeito

$$A \circ A = \underset{u_j}{\nabla} \left\{ \Delta \left[J_A (u_1, u_j\ ),\ J_A\ (u_j\ , u_3) \right] \right\}$$

5.1.4 *TRANSITIVIDADE (INVERSA)*

Se $\forall\ (u_1, u_2),\ (u_2, u_3) \in \mathcal{U}^2$ for:

$$\Delta \left\{ J_{\bar{A}}\ (u_1, u_3),\ \underset{u_2}{\Delta} \left[\nabla \left(J_{\bar{A}} (u_1, u_j\ ),\ J_{\bar{A}} (u_j\ , u_3) \right) \right] \right\} = J_{\bar{A}}\ (u_1, u_3)$$

então A é transitiva (inversa).

Esta definição só pode ser aplicada se o conjunto reticulado for complementado ou, quando muito, pseudo-complementado (à Zadeh).

Os resultados das duas formas, directa e inversa, não são, em geral, os mesmos.

5.1.5 *ANTI-SIMETRIA*

Se $\forall\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$ for:

$$\left[J_A (u_1, u_2) \neq J_A (u_2, u_1) \right] \cup$$

$$\cup \left[J_A\ (u_1, u_2) = J_A\ (u_1, u_2) \right] = 0$$

então A é anti-simétrica.

5.1.6 *ANTI-SIMETRIA À ZADEH*

Só se aplica a reticulados $(\{0, 1\}, \uparrow, \psi)$.

Se $\forall\ (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$ for

$$\left[J_A\ (u_1, u_2) > 0 \right] \Rightarrow \left[J\ (u_2, u_1) = 0 \right]$$

então A é anti-simétrica à Zadeh.

5.1.7 *FECHO TRANSITIVO DUMA RELAÇÃO BINÁRIA*

Seja $A \subseteq \mathcal{U}$ e simbolize-se por $A^2 = A \circ A$. O elemento genérico $J_{A^2}\ (u_i, u_j) \in A^2$ terá a forma:

(*) Continuação do trabalho «Introdução aos Conjuntos Vagos» publicado na Técnica-433, Fevereiro de 1976, pág. 201 a 217.

$J_{A^2}(u_i, u_j) \in A^2 =$

$$= \underset{u_k}{\nabla} \left\{ \Delta \left[J_A(u_i, u_k), J_A(u_k, u_j) \right] \right\}$$

e se A for transitiva directa já vimos que $J_A \nabla J_{A^2} = J_A$ ou seja $J_A \geqslant J_{A^2}$ ou $A \supseteq A^2$. (veja-se 4.1.3).

Dum modo geral $A^k \supseteq A^{k+1}$.

Chama-se *fecho transitivo* duma relação binária a

$$\underset{t}{A} \bigcup_{i=1} A^i$$

a) Se A for transitivo então $\underset{t}{A}$ é transitivo.

b) Se $A \supseteq \underset{t}{A}$ então A é transitivo.

c) Se $A = A^2$ então A é transitivo.

d) Se a partir da ordem k, $A^{k+1} = A^k$ então

$$\underset{t}{A} = \bigcup_{i=1}^{k} A^i$$

são propriedades que resultam da definição imediatamente.

5.1.8 *CAMINHOS NUM GRAFO FINITO*

Seja dado:

Um grafo $A \subseteq \mathcal{U}^2$, cujo caracterizante $J_A \subseteq (\Omega, \nabla, \Delta)$ reticulado, onde Card $\mathcal{U}$ é finito.

Define-se *caminho finito* c_{ik} de u_i para u_k, num grafo finito A, um q-uplo, com a seguinte forma e propriedades:

a) $c_{ik} = (u_i, \ldots, u_k)$ é um q-uplo *ordenado*, cujos elementos vão ser resimbolizados, passando a escrever-se:

$$c_{ik} = ({}_1u, \ldots, {}_qu)$$

com ${}_1u = u_i$ e ${}_qu = u_k$ ($q \geqslant 2$ e finito).

b) $\forall\, j \in (1, \ldots, q), {}_ju \in \mathcal{U}$

c) $\forall\, j, p \in (1 \ldots q), {}_ju \neq {}_pu$

donde resultará que

$${}_1u = u_i \neq {}_qu = u_k$$

d) $\forall\, j, j+1 \in (1, \ldots, q-1)$;

$$\nabla \left[J_A({}_ju, {}_{j+1}u), 0 \right] \neq 0$$

onde 0 é o ínfimo de Ω.

O *comprimento* h de c_{ik} é dado $(q-1)$:

$$h(c_{ik}) = q - 1$$

A *largura* l do caminho c_{ik} é definida da forma seguinte:

$$l(c_{ik}) = \underset{j}{\Delta} [J_A({}_ju, {}_{j+1}u)] \quad \text{com } j \in (1 \ldots q-1),\ l \in \Omega$$

5.1.9 *CAMINHO DE MAIOR LARGURA DE u_i PARA u_k.*

Seja $\mathscr{C}_{ik}$ o conjunto vulgar de todos os caminhos distintos iniciados em u_i e terminados em u_k.

Os caminhos $c_{ik}^m \in \mathscr{C}_{ik}$ e $c_{ik}^n \in \mathscr{C}_{ik}$ dizem-se distintos se os respectivos q-uplos forem *distintos*, isto é, tiverem pelo menos um elemento distinto, ou a ordem é diferente, ou q é diferente. Então o caminho de *maior largura* será o caminho c_{ik}^r tal que:

$$\nabla \left[l(c_{ik}^r), l(c_{ik}^s) \right] = l(c_{ik}^r)$$

$$\text{e} \quad \Delta \left[l(c_{ik}^r), l(c_{ik}^s) \right] = l(c_{ik}^s)$$

$$\text{para } \forall\, c_{ik}^s \in \mathscr{C}_{ik} \text{ e } c_{ik}^s \neq c_{ik}^r$$

Simboliza-se $l(c_{ik}^r) = L_{ik}$

5.1.10 *CAMINHOS DE MAIOR LARGURA E DE UM DADO COMPRIMENTO* h.

O conjunto $\mathscr{C}_{ik}$ de todos os caminhos iniciados em u_i e acabados em u_k pode ser dividido em classes de equivalência usando o comprimento h como critério de classificação.

Assim ${}_h\mathscr{C}_{ik}$ representará todos os caminhos iniciados em u_i e terminados em u_k que tenham um comprimento h e

$$\bigcup_h {}_h\mathscr{C}_{ik} = \mathscr{C}_{ik}$$

Pode definir-se a *largura* ${}_hL_{ik}$ do caminho de maior largura e de comprimento h

$${}_hL_{ik} = l(c_{ik}^r)$$

que satisfaz ao seguinte conjunto de condições:

a) $c_{ik}^r \in {}_h\mathscr{C}_{ik}$

b) $\nabla \left[l(c_{ik}^r), l(c_{ik}^s) \right] = l(c_{ik}^r)$

$$\text{e} \quad \Delta \left[l(c_{ik}^r), l(c_{ik}^s) \right] = l(c_{ik}^s)$$

$$\text{para } \forall\, c_{ik}^s \in {}_h\mathscr{C}_{ik} \text{ e } c_{ik}^s \neq c_{ik}^r$$

5.1.11 *APLICAÇÃO DESTES CONCEITOS A GRAFOS CUJOS RETICULADOS* (Ω, ∇, Δ) *ASSOCIADOS SÃO TRANSITIVOS, COMO SUCEDE COM OS RETICULADOS DE ZADEH.**

A transitividade exprime-se pela proposição:

$$\forall (\alpha, \beta) \in \Omega^2 \left[\left(\Delta(\alpha, \beta) = \alpha \right) \cup \left(\Delta(\alpha, \beta) = \beta \right) \right] \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta$$

Então teremos:

a) $I(c_{ik}) = \underset{j}{\Delta} \left[J_A({}_j u, {}_{j+1} u) \right] \quad j \in (1, \ldots, q-1)$

Haverá *pelo menos um* $J_A({}_l u, {}_{l+1} u) = I(c_{ik})$ com $l \in (1, \ldots, q-1)$

b) $L_{ik} = I(c^r_{ik}) = \nabla \left(I(c^r_{ik}), I(c^s_{ik}) \right) = I(c^r_{ik})$

$$\forall c^s_{ik} \in \mathscr{C}_{ik}$$

é suficiente para definir L_{ik}

c) Há pelo menos um $J_A({}_m u, {}_{m+1} u) = L_{ik}$

$$m \in (1, \ldots, q-1)$$

d) porque

$$L_{ik} = \nabla \left\{ \Delta \left[J_A({}_j u, {}_{j+q} u) \right] \right\}$$

e da definição de *fecho transitivo* (5.4.3) pode estabelecer-se que:

$$J_A{}^h(u_i, u_k) = {}_h L_{ik} \qquad \text{(directamente)}$$

e) $$J_{\underset{t}{A}}(u_i, u_k) = L_{ik} \qquad \text{(directamente)}$$

f) Se $h > \text{Card } \mathcal{U}$ então

$${}_h L_{ik} = {}_m L_{ik}$$

para $m \leqslant \text{Card } \mathcal{U}$. Basta lembrar que o grafo é finito e que caminhos com $h > n$ têem repetições (circulações) que não alteram o resultado devido à idempotência dos operadores Δ e ∇.

g) $$\underset{t}{A} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{e} \quad n = \text{Card } \mathcal{U}$$

pelas razões já invocadas.

(*) Veja-se Anexo 2.

5.2 — DEFINIÇÕES DE VÁRIOS TIPOS DE RELAÇÕES

5.2.1 *PRE-ORDEM VAGA*

Pre-ordem vaga é uma relação binária, transitiva e reflexiva. Daqui resultam as seguintes propriedades:

a) $A^2 = A \circ A$ e

$$J_{A^2}(u_1, u_2) = \underset{u_i}{\nabla} \left[J_A(u_1, u_i) \Delta J_A(u_i, u_2) \right]$$

mas para $i = 1$ será

$$J_A(u_1, u_1) \Delta J_A(u_1, u_2)$$

e porque $J_A(u_1, u_1) = 1$ (reflexividade) será

$$J_A(u_1, u_1) \Delta J_A(u_1, u_2) = J_A(u_1, u_2)$$

Atendendo à transitividade

$$J_A(u_1, u_2) \geqslant \alpha$$

donde

$$J_{A^2}(u_1, u_2) = J_A(u_1, u_2)$$

e finalmente

$$A^2 = A \text{ (e não apenas } A^2 \subset A)$$

b) Dum modo geral $A^k = A$ e $\underset{t}{A} = A$ (feho transitivo)

5.2.2 *SEMI PRÉ-ORDEM VAGA*

Relação binária não reflexiva e transitiva.

5.2.3 *PRÉ-ORDEM ANTI-REFLEXIVA VAGA*

Transitiva mas $\forall u \in \mathcal{U}$: $J_A(u, u) = 0$

5.2.4 *RELAÇÃO DE SIMILITUDE (OU SEMELHANÇA) VAGA*

É uma relação pré-ordem vaga simétrica.
Porque é simétrica pode escrever-se

$$\alpha = J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1)$$
$$\beta = J_A(u_2, u_3) = J_A(u_3, u_2)$$
$$\gamma = J_A(u_1, u_3) = J_A(u_3, u_1)$$

Dadas as relações de transitividade será:

$$\alpha \geqslant \beta \Delta \gamma$$
$$\beta \geqslant \alpha \Delta \gamma$$
$$\gamma \geqslant \alpha \Delta \beta$$

donde o seguinte conjunto de restrições:

$$\alpha \geqslant \beta \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$$
$$\alpha \geqslant \beta \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$
$$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$
$$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \gamma = \beta$$
$$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha$$
$$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \alpha \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$
$$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \gamma$$
$$\alpha \geqslant \gamma \wedge \beta \geqslant \gamma \wedge \gamma \geqslant \beta \Rightarrow \beta = \gamma$$

Estas propriedades resultam da simetria e podem resumir-se:

$$(\alpha \geqslant \beta = \gamma) \vee (\beta \geqslant \alpha = \gamma) \vee (\gamma \geqslant \alpha = \beta)$$

5.2.5 *SUB-RELAÇÕES DE SIMILITUDE DUMA PRÉ-ORDEM VAGA*

Seja dada uma pré-ordem vaga $A \subseteq \mathcal{U}^2$ e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ um sub-conjunto vulgar que constitui um sub-referencial e $J_1 \subset J$ um sub-conjunto de J e relativado a $\mathcal{U}_1$; se

$$J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1) \qquad \forall\, u_1, u_2 \in \mathcal{U}_1$$

os elementos de $\mathcal{U}_1$ formarão uma *sub-relação de similidade.*

Uma sub-relação de similitude é maximal se não estiver contida noutra sub-relação de similitude.

A classe de todas as sub-relações de similitude maximais se existir numa pré-ordem designa-se por *classe de similitudes da pré-ordem.*

Uma pré-ordem que pode ser decomponível em classes de similitude diz-se uma pré-ordem redutível.

5.2.6 *ANTI-SIMETRIA (VAGA)*

$\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2$ e $u_1 \neq u_2$:

$[J_A(u_1, u_2) \neq J_A(u_2, u_1)]$ ou $[J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1) = 0]$

diz-se que a relação à anti-simétrica.

5.2.7 *GRAFO ANTI-SIMÉTRICO VULGAR ASSOCIADO A UMA RELAÇÃO VAGA*

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2$$

$$1)\ u_1 \neq u_2 \wedge \left[J_A(u_1, u_2) > J_A(u_2, u_1) \right] \Rightarrow \left[(u_1, u_2) \in G \text{ e } (u_2, u_1) \notin G \right]$$

$$2)\ u_1 \neq u_2 \left[J_A(u_1, u_2) = J_A(u_2, u_1) \right] \Rightarrow \Rightarrow \left[(u_1, u_2) \text{ e } (u_2, u_1) \notin G \right]$$

5.2.8 *ANTI-SIMETRIA PERFEITA (VAGA)*

Define-se $\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{U}^2$ e $(u_1 \neq u_2)$

será: se $J_A(u_1, u_2) > 0$ então $J_A(u_2, u_1) = 0$

5.2.9 *RELAÇÃO DE ORDEM VAGA*

É uma relação binária reflexiva, transitiva, anti-simétrica. Porque $J_A(u_1, u_2) \geqslant J_A(u_2, u_1)$ em $\mathcal{U}$ induz-se uma ordem:

$$u_2 \geqslant u_1$$

5.2.10 *RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL VAGA*

Se o grafo vulgar associado representa uma ordem total.

5.2.11 *RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL VAGA*

Basta que o grafo vulgar associado seja de ordem parcial.

5.2.12 *RELAÇÃO DE ORDEM PERFEITA (VAGA)*

Se se usar para definição de anti-simetria a definição 5.2.8.

5.2.13 *RELAÇÃO DE ORDEM ESTRICTA (VAGA)*

Relação estricta { transitiva, anti-reflexiva, anti-simétrica }

Relação não estricta { transitiva, reflexiva, anti-simétrica }

5.3 — OUTRA RELAÇÕES TÍPICAS

5.3.1 *RELAÇÕES ORDINAIS (VAGAS)*

São relações que gozam das seguintes propriedades:

— reflexiva

— anti-simétrica (veja-se 5.2-6, 7, 8)

— não tem circuitos no grafo vulgar associado de comprimento superior a 1.

5.3.2 *FUNÇÃO ORDINAL DUM GRAFO VAGO*

Veja-se Anexo-3 que trata este tema para grafos vulgares.

A definição de relação de ordem vaga ordinal impõe que goze das seguintes propriedades:

— reflexiva

— anti-simétrica

— sem circuitos

— transitiva

É possível definir uma *função ordinal* para a relação de ordem vaga ordinal. Para o efeito usa-se o método descrito no Anexo-3 para onde se remete o leitor interessado nesse método.

5.3.3 *RELAÇÃO DE DISSEMELHANÇA (OU DISSIMILITUDE) VAGA*

Caracteriza-se por ser:

— simétrica

— anti-transitiva

Falta definir o que se entende por anti-transitiva. Anti-transitividade define-se como segue:

$$\forall\ (u, v),\ (v, w),\ (u, w) \subseteq \mathcal{U}^2$$

$$J_A\ (u, w) \leqslant \underset{v}{\Delta}\ [J_A(u, v)\ \nabla\ J_A\ (v, w)]$$

5.3.4. Tem interesse em confrontar a *«dissemelhança»* com a *«semelhança»*

Semelhança: simetria $\begin{cases} \alpha = J_A(u, w) = J_A\ (w, u) \\ \beta = J_A(u, v) = J_A\ (v, u) \\ \gamma = J_A(v, w) = J_A\ (w, v) \end{cases}$

Dissemelhança simetria $\begin{cases} \overline{\alpha} = J_{\overline{A}}\ (u, w) = J_{\overline{A}}\ (w, u) \\ \overline{\beta} = J_{\overline{A}}\ (u, v) = J_{\overline{A}}\ (v, u) \\ \overline{\gamma} = J_{\overline{A}}\ (v, w) = J_{\overline{A}}\ (w, v) \end{cases}$

São ambas simétricas.

Dissemelhança $J_A(u, u) = V$
Semelhança $J_{\overline{A}}\ (u, u) = O$ e $\begin{cases} V\ \Delta\ O = O \\ V\ \nabla\ O = V \end{cases}$

Finalmente

Semelhança $\alpha \geqslant \underset{v}{\nabla}\ (\beta_v\ \Delta\ \gamma_v\ )$
Dissemelhança $\overline{\alpha} \leqslant \underset{v}{\Delta}\ (\overline{\beta}_v\ \nabla\ \overline{\gamma}_v\ )$ transitividade

a aplicação das leis de De Morgan verificam as expressões de transitividade.

Portanto se o reticulado for complementado e se J_A satisfizer as regras de semelhança então $J_{\overline{A}}$ verifica as regras de dissemelhança.

Pode estender-se esta afirmação aos reticulados de Zadeh ([0,1], $\uparrow$, ψ) que gozam da propriedade da pseudo complementariedade. A demonstração seguia os mesmos passos.

5.3.5 Relação *parecença é reflexiva* e simétrica.

5.3.6 Relação de *não parecença* é anti-relexiva e simétrica.

5.4 — RELAÇÕES E SUAS PROPRIEDADES QUANDO O RETICULADO É DE ZADEH ([0,1], $\uparrow$, ψ)

Embora se tenham feito algumas referências ao reticulado de Zadeh e porque este é dos mais empregados em conjuntos vagos, convém dedicar uma alínea ao estudo de algumas situações típicas que ocorrem com as relações já apresentadas no caso do reticulado se; de Zadeh.

5.4.1. — *CONCEITO DE DISTÂNCIA MIN MAX (D) ENTRE ELEMENTOS DUMA RELAÇÃO BINÁRIA.*

$$d_A(u, v) = 1 - J_A(u, v)$$

com $u, v \in \mathcal{U}$ e $J_A \in ([0;1], \uparrow, \psi)$

e se $\overline{A}$ for o complemento de A

$$d_A\ (u, v) = J_{\overline{A}}\ (u, v)$$

Estas definições serão aplicadas a vários tipos de relações e há que provar, em cada caso, se a definição de d_A satisfaz as regras de uma distância.

Aplicação a uma relação de semelhança (ver)

$$d_A(u, v) = 1 - J_A(u, v)$$

sendo A uma relação de semelhança vaga
A é: transitiva (directa)

reflexiva

simétrica

Porque é <u>*transitiva*</u> teremos:

$$J_A(u, v) \geqslant \underset{w}{\psi}\ [J_A\ (u, w) \uparrow J_A(w, v)]$$

ou

$$1 - J_A(u, v) \leqslant \underset{w}{\uparrow}\ [1 - J_A(u, w)\ \psi\ (1 - J_A\ (w, v))]$$

ou

$$d_A\ (u, v) \leqslant \underset{w}{\uparrow}\ [d_A\ (u, w)\ \psi\ d_A\ (w, v)]$$

Porque é <u>*simétrica:*</u>

$$J_A\ (u, v) = J_A(v, u)$$

donde

$$d_A(u, v) = 1 - J_A(u, v) = 1 - J_A(v, u) = d_A(v, u)$$

Porque é *reflexiva*:

$$J_A(u, u) = 1 \quad \text{(supremo)}$$

donde

$$d_A(u, u) = 1 - J_A(u, u) = 1 - 1 = 0 \quad \text{(ínfimo)}$$

e $d_A = 0 \Rightarrow 1 - J_A(u, w) = 0$ ou $J_A(u, w) = 1$

e daí que $u = w$

logo é mesmo uma distância.

Finalmente tem interesse em reparar que se designarmos por $\overline{A}$ a relação complementar de A com $J_A = 1 - J_{\overline{A}}$ então $J_A(u, v) = J_{\overline{A}}(u, v)$ e ainda que o operador que conjuga $d_A(u, w)$ com $d_A(w, v)$ é:

$$\uparrow [d_A(u, w) \psi d_A(w, u)]$$

e daí a designação «min . máx».

Aplicação a uma relação de parecença (ver 5.3.5).

Uma relação de parecença A é reflexiva e simétrica; daí que o fecho transitivo A_t é ainda transitiva (directa) portanto A_t é simétrica reflexiva e daí uma relação de similitude (ou semelhança).

Define-se distância entre dois elementos u, v de A, como sendo

$$d_A(u, v) = 1 - d_{A_t}(u, v)$$

5.4.2 — *CONCEITO DE DISTÂNCIA MINSOMA D ENTRE ELEMENTOS DUMA RELAÇÃO BINÁRIA.*

Os operadores são agora $\uparrow$ e $\pm$ (soma disjuntiva)

Se A for o conjunto dado seja A^* o conjunto obtido de A pela operação seguinte:

$$J_{A^*}(u, v) = \underset{w}{\uparrow} [J_A(u, w) \pm J_{A^*}(w, v)]$$

que designaremos por min soma.

Aplicação a uma relação de parecença

$$D_A(u, v) = 1 - D_{A_t}(u, v)$$

$$J_{A_t}(u, v) = J_{A_t}(v, u) \Rightarrow D_A(u, v)$$

$$J_{A_t}(u, u) = 1 \Rightarrow D_{A_t}(u, u) = 0$$

e finalmente

$$J_{A_t}(u, v) \geqslant \underset{w}{\psi} [J_{A_t}(u, w) . J_{A_t}(w, v)]$$

ou

$$1 - J_{\overline{A}_t}(u, v) \geqslant \underset{w}{\psi} [1 - J_{\overline{A}_t}(u, w) . (1 - J_{A_t}(w, v))]$$

$$1 - J_{\overline{A}_t}(u, v) \geqslant \underset{w}{\psi} [1 - (J_{\overline{A}_t}(u, w) + J_{\overline{A}_t}(w, v) - J_{\overline{A}_t}(u, w) . J_{\overline{A}_t}(w, v))]$$

$$J_{\overline{A}_t} \leqslant \underset{w}{\uparrow} [J_{\overline{A}_t}(u, w) \pm J_{\overline{A}_t}(w, v)]$$

como se desejava demonstrar

$$D(u, v) \geqslant D(u, w) \odot D(w, v)$$

onde $\odot$ é a operação minsoma no domínio do reticulado de Zadeh.

5.4.3 — *FECHOS TRANSITIVOS*

a) Fecho transitivo do tipo máx. prod.

Os operadores definidos no reticulado são $(\psi, \bullet)$ ou seja Máx. e prod. vulgares.

Se A for um conjunto vago, numa relação a composição do tipo *máx. prod.* será:

$$J_{A^2} = J_{AoA} = \underset{w}{\psi} [J_A(u, w) . J_A(w, v)]$$

e se Card $A = \gamma$ então o fecho transitivo (max. prod.) será:

$$A_t = \bigcup_{i=1}^{\gamma} A^i$$

Outras formas de compor típicas são:

$$J_{A^2} = J_{(AoA)} = \underset{w}{\psi} [J_A(u, v) \uparrow J_A(w, v)]$$

ou

$$J_{A^2} = J_{(AoA)} = \underset{w}{\nabla} [J_A(u, w) \Delta J_A(w, v)]$$

Note-se que:

$$J_A(v, w) . J_A(w, v) \leqslant J_A(u, w) \uparrow J_A(w, v)$$

e daí que, se for verdade $A^2 \subset A$ pela operação $(\psi . \uparrow)$ então também pela operação $(\psi, \bullet)$ será verdade que $A^2 \supseteq A$.

Também se pode concluir que

$$(A < \psi, \uparrow > A) \supset (A < \psi, \bullet > A)$$

onde $< \psi, \uparrow >$ e $< \psi, \bullet >$ são os operadores max-min e max-prod. respectivamente.

5.4.4 — *COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO*

Aplicação destas operações a certos tipos de relações *binárias*.

a) Relação de similitude

Dum modo geral será:

$$R = \underset{\alpha}{\nabla} \alpha . R_\alpha$$

onde $o < \alpha \leqslant 1$ e $\alpha . R_\alpha$ é o producto vulgar α pelos elementos de R_α . R_α é o conjunto vulgar de nível α.

Demonstrar que se R é uma relação de similitude será:

$$(\alpha_1 > \alpha_2) \Leftarrow\Rightarrow R_{\alpha_1} \supset (R_{\alpha_2})$$

e que, dum modo geral, R_α é uma relação de equivalência. Para demonstrar que R_α é uma relação de equivalência basta verificar se é reflexiva simétrica e transitiva o que é fácil sabendo que uma relação de similitude é também reflexiva simétrica e transitiva, e que

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Leftarrow\Rightarrow R_{\alpha_1} \supset R_{\alpha_2}$$

é igualmente imediata a demonstração.

b) Relação de ordem perfeita.

É fácil ver que se

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \Rightarrow \underline{R}_{\alpha_1} \subset \underline{R}_{\alpha_2}$$

c) Aplicação das composições ao caso em que $\Omega \equiv [a; b] \subseteq R$.

Seja

$$J_A(x, y) = \alpha \qquad \alpha \in \Omega$$

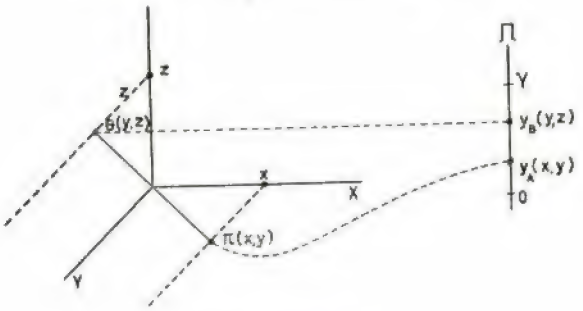
$$J_B(y, z) = \beta \qquad \beta \in \Omega$$

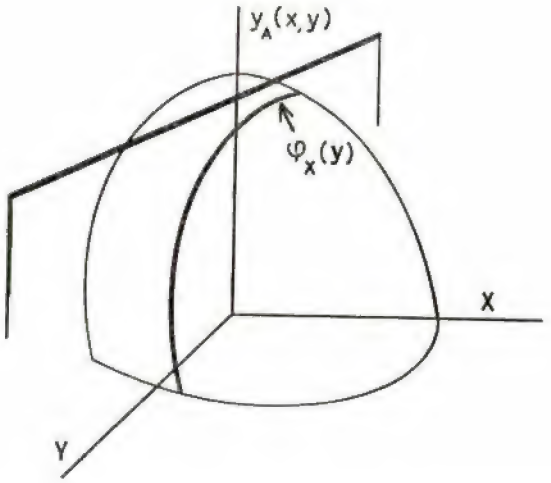
Sejam ψ e $\hat{\psi}$ as operações definidas em Ω e o operador de composição, por exemplo, $\underset{\psi\hat{\psi}}{\aleph}$

e

$$\hat{\psi}(J_A, J_B) = J_A$$

$$J_{(A,B)}(x, z) = \underset{y}{\vee}[J_A(x, y) \Delta J_B(y, z)]$$





$$_x J_A(y) \searrow$$
$$_z J_B(y) \quad {}_x J_A(y) = {}_z J(y)$$

Sejam P_1 P_2 P_3 os pontos de cruzamento;

há que estudar $[0, P_1]$ $[P_1, P_2]$ $[P_n, V]$

Em cada intervalo tomamos:

$$_x J_A(y) \quad \text{se} \quad {}_x J_A(y) < {}_z J_B(y)$$

$$\text{ou } {}_z J_B(y) \quad \text{se} \quad {}_x J_A(y) > {}_z J_B(y)$$

as partições $[P_\alpha ; P_\beta]$ são função de (x, z)

ANEXO 1

A1.1 — *Correspondências (relações)*

Sejam dados dois ronjuntos $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ e forme-se o producto cartesiano $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$; seja $G \subseteq \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ um sub-conjunto dado; então G é o grafo da correspondência Γ estabelecida do conjunto $\mathcal{U}_1$ para o conjunto $\mathcal{U}_2$.

A1.2 — *Aplicação* é toda a correspondência que gosa da propriedade adicional de:

$$\forall\, x \in \mathcal{U}_1 \;\exists\; y \in \mathcal{U}_2 : (x, y) \in G \text{ e } G \subseteq \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

A1.3 — Uma aplicação diz-se *funcional* ou função se e só se existir apenas um y para cada x, no grafo G:

$$\forall\, x \in \mathcal{U}_1 \;\exists^1\; y \in \mathcal{U}_2 : (x, y) \in G$$

A1.4 — No texto, para simplicidade de linguagem o vocábulo *aplicação* vai ser usado por *aplicação funcional.*

A1.5 — *Relação binária,* diz-se das relações cujos grafos G estão contidos no producto cartesiano $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ que simbolizaremos por $\mathcal{U}^2$.

A1.6 — *Conjuntos Ordenados.*

Uma relação binária w definida em $\mathcal{U}^2$ diz-se *relação de ordem* se for transitiva e equivalente.

a) Diz-se *transitiva* se:

$$(x, y) \text{ e } (y, z) \in w \text{ então } (x, z) \in w$$

b) Diz-se *equivalente* se:

$$(x, y) \text{ e } (y, z) \in w \text{ então } x = y$$

A1.7 — *Pré-ordem*

Uma relação binária diz-se uma *pré-ordem* se for reflexiva e transitiva.

A *reflexividade* define-se como:

$$\forall\, x \in \mathcal{U},\ (x, x) \in \omega$$

A1.8 — A noção de *inclusão* ($\subseteq$) permite ordenar o conjunto das partes de $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Com efeito, sendo dados A e B $\in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ como é possível definir B $\subseteq$ A ou A $\subseteq$ B será então possível ordenar os elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

A1.9 — *Relações de ordem mais usadas e seu significado semântico.*

a) ($\geqslant$) — x é maior ou igual a y : $x \geqslant y$

b) ($>$) — x é maior que y : $x > y$

Assim $x \geqslant y = (x > y) \vee (x = y)$

A1.10 — *Cofinal (coinicial)*

Num conjunto ordenado $(\mathcal{U}, \geqslant)$ ao conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$ dá-se o nome de cofinal (ou coinicial) se se verificar:

$$\forall\, y \in \mathcal{U}\ \exists\, x \in X : x \geqslant y \quad (\text{ou } y \geqslant x)$$

A1.11 — *Elemento minimal (maximal) em* $(\mathcal{U}, \geqslant)$

O elemento $a \in \mathcal{U}$ é minimal (ou maximal) se, sendo $a \geqslant x$ (ou $x \geqslant a$), então tivermos $x = a$

A1.12 — *Elemento menor (maior)*

$a \in (\mathcal{U}, \geqslant)$ será elemento menor (ou maior) se $\forall\, x \in \mathcal{U}$ for $x \geqslant a$ (ou $x \leqslant a$).

A1.13 — *Conjunto minorante (majorante)*

O elemento $x \in (\mathcal{U}, \geqslant)$ é minorante (ou majorante) do conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$ se $\forall\, y \in A$ for $y \geqslant x$ (ou $x \geqslant y$).

O conjunto minorante m (ou majorante M) de A é o conjunto contituído por todos os elementos x tais que $\forall\, y \in A$ tem-se $y \geqslant x$ (ou $x \geqslant y$).

A1.14 — *Limite inferior (superior)*

Limite inferior (superior) é o elemento maior (menor) do conjunto minorante (majorante).

A1.15 — *Conjunto filtrante*

Todo o conjunto A, pré-ordenado, é filtrante à direita (à esquerda) se toda e qualquer parte finita de A não vazia for majorada (minorada).

A1.16 — *Reticulado* (*) é qualquer conjunto ordenado $\mathcal{U}$ onde todo o $A \subseteq \mathcal{U}$ tem limite superior e limite inferior, e esses limites pertencem a $\mathcal{U}$.

ANEXO 2 — CONJUNTOS RETICULADOS

A 2.1 — *Definição*

Seja dada uma triada (Ω, ∇, Δ) onde Ω é um conjunto com dois ou mais elementos e ∇ e Δ são duas operações internas conjugadas definidas em Ω e que gozam das seguintes propriedades:

a) *fechadas e unicidade no resultado*

$$\nabla(\alpha, \beta) = \delta \in \Omega \qquad \forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2$$

$$\Delta(\alpha, \beta) = \gamma \in \Omega \qquad \forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2$$

δ e γ são *únicos.*

b) ∇, Δ *são operações associativas*

$$\nabla[\alpha, \nabla(\beta, \gamma)] = \nabla[\nabla(\alpha, \beta), \gamma]$$

$$\Delta[\alpha, \Delta(\beta, \gamma)] = \Delta[\Delta(\alpha, \beta), \gamma]$$

para $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \Omega$.

c) ∇, Δ *são operações comutativas*

$$\nabla(\alpha, \beta) = \nabla(\beta, \alpha)$$

$$\Delta(\alpha, \beta) = \Delta(\beta, \alpha)$$

para $\forall\, \alpha, \beta \in \Omega$

d) *Existência e unicidade dum supremo e dum ínfimo.*

Existe um só elemento $V \in \Omega$ tal que

$$\forall\, \alpha \in \Omega,\ \nabla(\alpha, V) = V \qquad (\textit{supremo})$$

$$\exists\, 0 \in \Omega : \forall\, \alpha \in \Omega,\ \Delta(\alpha, 0) = 0 \qquad (\textit{ínfimo})$$

e) *Idempotentes*

$$\nabla(\alpha, \alpha) = \alpha$$

$$\Delta(\alpha, \alpha) = \alpha$$

para $\forall\, \alpha \in \Omega$

f) *Absorventes*

$$\Delta[\alpha, \nabla(\alpha, \beta)] = \alpha$$

$$\nabla[\alpha, \Delta(\alpha, \beta)] = \alpha$$

(*) Outras designações para reticulado Vemos, por exemplo:
— LATIS (ou LATA) expressão portuguesa
— REDE ORDENADA.

Para $\forall \alpha, \beta \in \Omega$

Em geral o conceito *semântico* destes símbolos operatórios são respectivamente:

Δ — limite inferior

∇ — limite superior

A 2.2 — *Propriedades mais interessantes dos reticulados*

a) Em consequência da comutatividade e da associatividade é fácil ver o seguinte:

$\Delta \{ \Delta [\Delta (\alpha, \beta), \gamma], \delta\} = \rho$ pode escrever-se simbolicamente $\Delta (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \rho$ tendo esta representação um significado claro.

Se ainda designarmos por $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e $A \subseteq \Omega$ então

$$\Delta [A] = \rho$$

e se $B = \{\alpha, \gamma, \eta, \theta\}$ com $B \subseteq \Omega$ então podemos escrever expressões tais como:

$$\Delta [(A \cap \bar{B}) \cup \{\gamma\}]$$

O mesmo se diz para o operador ∇. Em qualquer dos casos há que determinar os elementos correspondentes e que satisfazem à expressão entre os parêntesis rectos antes de operar com ∇ ou Δ.

b) Sejam

$$A, B \subseteq \Omega$$

$$\theta, \gamma, \delta \in \Omega$$

e

$$\nabla [B] = \theta$$

$$\nabla [A] = \gamma$$

$$\nabla [A \cup B] = \delta$$

Então é fácil ver que

$$\nabla (\theta, \gamma, \delta) = \delta$$

podendo eventualmente θ e (ou) γ serem iguais a δ. O mesmo com Δ.

c) *Supremo* e *ínfimo*

Seja:

$$\alpha \in \Omega, \quad A \subseteq \Omega, \quad \text{Card } A \geqslant 2$$

Então teremos:

$$\nabla (A, V) = V$$

$$\Delta (A, V) = \Delta (A)$$

$$\nabla (A, 0) = \nabla (A)$$

$$\Delta (A, 0) = 0$$

$$\nabla (\alpha, 0) = \alpha$$

$$\Delta (\alpha, 0) = 0$$

$$\nabla (\alpha, V) = V$$

$$\Delta (\alpha, V) = \alpha$$

d) *Relações de ordem e pre-ordem parciais*

Vamos estabelecer a seguinte equivalência entre as operações internas (∇), (Δ) e a relação de ordem ($\leqslant$).

Sendo $(\alpha, \beta) \in \Omega^2$ seja

$$[(\Delta (\alpha, \beta) = \alpha) \cup (\nabla (\alpha, \beta) = \beta)] \Leftrightarrow [\alpha \leqslant \beta]$$

Está assim definido um nexo entre os referidos símbolos operatórios e a relação de ordem.

Só quando for verdade o primeiro membro é possível definir uma relação de ordem e nem para todos os pares $(\alpha, \beta) \in \Omega^2$, $\Delta (\alpha, \beta)$ e/ou $\nabla (\alpha, \beta)$ são α e/ou β; em muitos casos $\nabla (\alpha, \beta) = \delta$ e/ou $\Delta (\alpha, \beta) = \gamma$ sendo $\delta \neq \alpha$ e β $\gamma \neq \alpha$ e β. Então entre (α, β) não se pode estabelecer uma relação de ordem: daí que esta ordem seja parcial.

Mais adiante demonstrar-se-à a transitividade, equivalência e reflexividade da relação ($\leqslant$) e ainda que ela não é total em geral, mas o seu grafo não é vazio.

Antes de passar a essas demonstrações é fácil de verificar a verdade das seguintes expressões:

$$[\Delta (\alpha, \beta) = \delta] \Rightarrow [(\delta \leqslant \alpha) \cap (\delta \leqslant \beta)]$$

$$[\nabla (\alpha, \beta) = \gamma] \Rightarrow [(\alpha \leqslant \gamma) \cap (\beta \leqslant \gamma)]$$

Com efeito:

$$\delta = \Delta (\alpha, \beta) = \Delta (\Delta (\alpha, \alpha), \beta) =$$

$$= \Delta (\Delta (\alpha, \beta), \alpha) = \Delta (\delta, \alpha)$$

mas

$$[\Delta (\delta, \alpha) = \delta] \Leftrightarrow [\delta \leqslant \alpha]$$

Repetia-se igual raciocínio para β e obtinha-se $[\delta \leqslant \beta]$ q. e. d.

O mesmo para a operação (∇).

Vejamos agora se o operador $\leqslant$ é efectivamente uma *relação de ordem parcial* e uma *pré-ordem parcial.*

Com efeito

I — Transitividade

Se for $(\alpha \leqslant \beta)$ e $(\beta \leqslant \gamma)$ então $(\alpha \leqslant \gamma)$

Com efeito

$$(\alpha \leqslant \beta) \Leftrightarrow [(\Delta (\alpha, \beta) = \alpha) \cup (\nabla (\alpha, \beta) = \beta)]$$

$$(\beta \leqslant \gamma) \Leftrightarrow [(\Delta (\beta, \gamma) = \beta) \cup (\nabla (\beta, \gamma) = \gamma)]$$

Há as quatro seguintes hipóteses a estudar:

$$[\Delta (\alpha, \beta) = \alpha] \cap [\Delta (\beta, \gamma) = \beta]$$

$$[\Delta (\alpha, \beta) = \alpha] \cap [\nabla (\beta, \gamma) = \gamma]$$

$$[\nabla (\alpha, \beta) = \beta] \cap [\Delta (\beta, \gamma) = \beta]$$

$$[\nabla (\alpha, \beta) = \beta] \cap [\nabla (\beta, \gamma) = \gamma]$$

Vejamos para a primeira:

$$\Delta(\alpha, \gamma) = \Delta[\Delta(\alpha, \beta), \gamma] = \Delta[\alpha, \Delta(\beta, \gamma)] =$$
$$= \Delta(\alpha, \beta) = \alpha$$

e se

$$[\Delta(\alpha, \gamma) = \alpha]$$

Para as formas $\nabla(\beta, \gamma) = \gamma$ basta recordar que

$$\Delta[\beta, \nabla(\beta, \gamma)] = \beta$$

ou

$$\Delta(\beta, \gamma) = \beta$$

$$[\nabla(\beta, \gamma) = \gamma] \Rightarrow \Delta(\beta, \gamma) = \beta$$

Pode acontecer que nem $\Delta(\alpha, \beta) = \alpha$ nem $\nabla(\alpha, \beta) = \beta$ e então não se pode declarar que $(\alpha \leqslant \beta)$. Isto significa que haverá pares (α, β) que não pertencem ao grafo da relação de ordem e daí que a ordem não é total, em geral.

Por outro lado existirão sempre um V e um O tais que

$$\left.\begin{array}{l}\nabla(\alpha, V) = V \\ \Delta(\alpha, O) = O\end{array}\right\} \quad \forall\, \alpha \in \Omega$$

e pelo menos se poderá declarar que

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \leqslant V \\ O \leqslant \alpha\end{array}\right\} \quad \forall\, \alpha \in \Omega$$

daí a existência de uma ordem parcial.

II — Equivalência

Esta propriedade expressa-se pela seguinte frase

$$[(\alpha \leqslant \beta) \cap (\beta \leqslant \alpha)] \Leftrightarrow [\alpha = \beta]$$

Com efeito

$$[(\Delta(\alpha, \beta) = \alpha) \cup (\nabla(\alpha, \beta) = \beta)] \Leftrightarrow (\alpha \leqslant \beta)$$
$$[(\Delta(\alpha, \beta) = \beta) \cup (\nabla(\alpha, \beta) = \alpha)] \Leftrightarrow (\beta \leqslant \alpha)$$
$$(\alpha \leqslant \beta) \cap (\beta \leqslant \alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(\Delta(\alpha, \beta) = \alpha) \cap (\Delta(\alpha, \beta) = \beta)] \cup$$
$$\cup [(\Delta(\alpha, \beta) = \alpha) \cap (\nabla(\alpha, \beta) = \alpha)] \cup$$
$$\cup [(\nabla(\alpha, \beta) = \beta) \cap (\Delta(\alpha, \beta) = \beta)] \cup$$
$$\cup [(\nabla(\alpha, \beta) = \beta) \cap (\nabla(\alpha, \beta) = \alpha)]$$

ou

$$(\alpha = \beta) \cup (\alpha = \beta) \cup (\alpha = \beta) \cup (\alpha = \beta)$$

Logo

$$(\alpha = \beta) \Leftrightarrow [(\alpha \leqslant \beta) \cap (\beta \leqslant \alpha)]$$

III — Reflexividade

$$\forall\, \alpha \in \Omega, \Delta(\alpha, \alpha) = \alpha \quad \text{e} \quad \nabla(\alpha, \alpha) = \alpha$$

Daí que $(\leqslant)$ seja também uma pré-ordem. A pré-ordem e a ordem definidas são *parciais*, como já se disse.

e) *Conceito de máximo e mínimo*

Quando for:

$$\forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2 \begin{cases} \Delta(\alpha, \beta) = \alpha & \nabla(\alpha, \beta) = \beta \\ \text{e} & \\ \Delta(\alpha, \beta) = \beta & \nabla(\alpha, \beta) = \alpha \end{cases}$$

então os símbolos Δ e ∇ serão substituídos por, respectivamente, $\uparrow$ e ψ e correspondem ao conceito semântico «máximo» e «mínimo».

Note-se que se β e $\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ e jogando com as propriedades da associatividade e comutatividade, temos que:

$$\Delta(A) = \delta \quad \delta \in \Omega \quad (\text{em geral } \delta \in A)$$

mas

$$\uparrow(A) = \varepsilon \quad \varepsilon \in A \subseteq \Omega$$

Identicamente

$$\psi(A) = \gamma \quad \gamma \in A \subseteq \Omega$$

com Card $A \geqslant 2$

Pode ainda escrever-se:

$$\left.\begin{array}{l}\uparrow(\Omega) = O \\ \psi(\Omega) = V\end{array}\right. \quad \text{em vez de} \quad \left.\begin{array}{l}\Delta(\Omega) = O \\ \nabla(\Omega) = V\end{array}\right.$$

A.2.3 — *Propriedades adicionais dos operadores Δ e ∇.*

A.2.3.1 — Distributividade

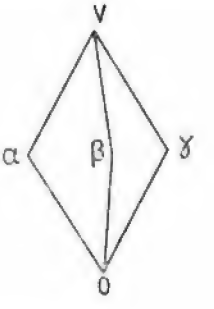
Os reticulados dizem-se distributivos se:

$$\nabla[\alpha, \Delta(\beta, \gamma)] = \Delta[\nabla(\alpha, \beta), \nabla(\alpha, \gamma)]$$

e $$\Delta[\alpha, \nabla(\beta, \gamma)] = \nabla[\Delta(\alpha, \beta), \Delta(\alpha, \gamma)]$$

quaisquer que sejam α, β, γ pertencentes a Ω.

O grafo seguinte *não* é distributivo



A2.3.2 — Complementariedade

β é complementar de α se for

$$\nabla(\alpha, \beta) = V$$
$$\text{e} \quad \Delta(\alpha, \beta) = O$$

Se β for único para cada α então β diz-se o complementar de α e representa-se por $\overline{\alpha}$.

Caso esta propriedade e respectiva unicidade seja verdadeira para todos os elementos de Ω, (Ω, ∇, Δ) diz-se complementado.

A principal propriedade daqui resultante é a da involução:

$$\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha \qquad \forall\, \alpha \in \Omega$$

Com efeito

$$\nabla\ (\alpha, \overline{\alpha}) = V$$

$$\Delta\ (\alpha, \overline{\alpha}) = O \qquad \text{(por definição)}$$

donde

$$\nabla\ [\overline{(\overline{\alpha})}, \overline{(\alpha)}] = V$$

$$\Delta\ [\overline{(\overline{\alpha})}, \overline{(\alpha)}] = O$$

mas o complementar de $\overline{\alpha}$ é único, logo

$$\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha \qquad \forall\, \alpha \in \Omega$$

A2.3.3. — Pseudo-complementariedade

Se $\tilde{\alpha} \in \Omega$ for um elemento relacionado com $\alpha \in \Omega$ de tal modo que $\tilde{(\tilde{\alpha})} = \alpha$, isto é, a aplicação sucessiva do operador $(\sim)$ reproduz o elemento de partida (ou seja, $(\sim)$ goza da propriedade da involução), então diz-se que se pode definir em (Ω, ∇, Δ) uma pseudo-complementaridade.

É evidente que se *não* exige que

$$\nabla\ (\tilde{\alpha}, \alpha) = V \quad \text{e} \quad \Delta\ (\tilde{\alpha}, \alpha) = O$$

A2.3.4. — Teoremas de Morgan

Os teoremas apresentam-se da forma seguinte:

Teorema 1 — $\overline{\nabla\ (\alpha, \beta)} = \Delta\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta})$

Teorema 2 — $\overline{\Delta\ (\alpha, \beta)} = \nabla\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta})$

Para que se verifiquem os teoremas de De Morgan é necessário que:

— O reticulado seja complementado.

$\forall\, \alpha \in \Omega$, existe um só elemento $\beta \equiv \overline{\alpha}$ em Ω tal que:

$$\nabla\ (\alpha, \overline{\alpha}) = V$$

$$\Delta\ (\alpha, \overline{\alpha}) = O$$

— Se designarmos por

$$\nabla\ (\alpha, \beta) = \gamma\,, \quad \gamma \in \Omega$$

$$\Delta\ (\alpha, \beta) = \delta\,, \quad \delta \in \Omega$$

como (Ω, ∇, Δ) é complementado γ e δ existem e são únicos.

— Finalmente

$$\nabla\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \psi\,, \quad \psi \in \Omega$$

$$\Delta\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \rho\,, \quad \rho \in \Omega$$

ρ e ψ são igualmente únicos.

Em resumo:

$\forall\, (\alpha, \beta) \in \Omega^2$ existirão e serão únicos: $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \gamma, \delta, \rho, \psi$, ao todo oito elementos contando com α e β. Estes oito elementos estão entre si vinculados por oito proposições:

$$\nabla\ (\overline{\alpha}, \alpha) = V$$

$$\Delta\ (\overline{\alpha}, \alpha) = O$$

$$\nabla\ (\overline{\beta}, \beta) = V$$

$$\Delta\ (\overline{\beta}, \beta) = O$$

$$\nabla\,[\nabla\ (\alpha, \beta)\,,\ \Delta\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = V \quad \text{ou} \quad \nabla\ [\gamma, \rho] = V$$

$$\Delta\ [\nabla\ (\alpha, \beta)\,,\ \Delta\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = O \quad \text{ou} \quad \Delta\ [\gamma, \rho] = O$$

$$\nabla\ [\Delta\ (\alpha, \beta)\,,\ \nabla\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = V \quad \text{ou} \quad \nabla\ [\delta, \psi] = V$$

$$\Delta\ [\Delta\ (\alpha, \beta)\,,\ \nabla\ (\overline{\alpha}, \overline{\beta})] = O \quad \text{ou} \quad \Delta\ [\delta, \psi] = O$$

Não há muitos reticulados que satisfaçam às condições de De Morgan. Como exemplos teremos:

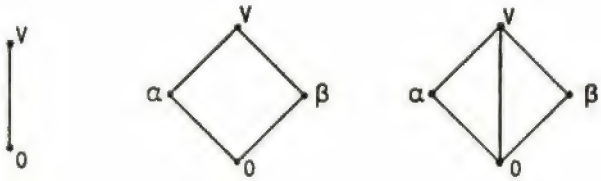


fig. 1 fig. 2 fig. 3

Por simples verificação é fácil de ver que são complementados e que as leis de De Morgan se aplicam.

O reticulado da figura 1 é o reticulado de Bool.

Os teoremas de De Morgan também se aplicam a certos reticulados pseudo-complementados, como o reticulado de Zadeh assim definido:

$([0, 1], \psi, \dot{\wedge})$, distributivo e pseudo-complementado.

Este reticulado goza das propriedades de lhe ser aplicável os teoremas de De Morgan.

Com efeito, definindo

$$\forall\, \alpha \in \Omega : \tilde{\alpha} = 1 - \alpha \quad \text{e} \quad \tilde{(\tilde{\alpha})} = \alpha$$

$(\sim)$ símbolo do pseudo-complemento.

então:

$$\psi\ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \psi\ (1 - \alpha, 1 - \beta) =$$

$$= 1 - \dot{\wedge}\ (\alpha, \beta) =$$

$$= \widetilde{\dot{\wedge}\ (\alpha, \beta)}$$

o mesmo se podendo fazer em relação a $\dot{\wedge}\ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

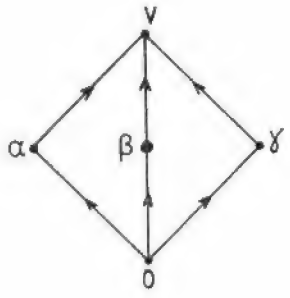
A2.3.5 — Reticulado Modular

Se $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega$ for:

$$(\alpha \leqslant \beta) \Rightarrow \alpha \nabla (\beta \Delta \gamma) = (\alpha \nabla \beta) \Delta \gamma$$

diz-se que (Ω, ∇, Δ) é um reticulado modular.

Como exemplo temos:



A2.3.6 — Conceito de dominância e comparabilidade

Seja dado o produto cartesiano $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$ e sejam igualmente dados dois elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ onde x_i e $y_i \in_i^r A_i$, $\forall_i \in (1 \ldots n)$.

Diz-se que $(x_1, \ldots, x_n)$ domina $(y_1, \ldots, y_n)$ se:

$$\forall_i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i \geqslant y_i$$

e domina estrictamente se

$$\forall_i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i > y_i$$

Se nem $(x_1, \ldots, x_n)$ domina $(y_1, \ldots, y_n)$ nem $(y_1, \ldots, y_n)$ domina $(x_1, \ldots, x_n)$ então dizem-se dois elementos não comparáveis.

A2.3.7 — Producto de Reticulados

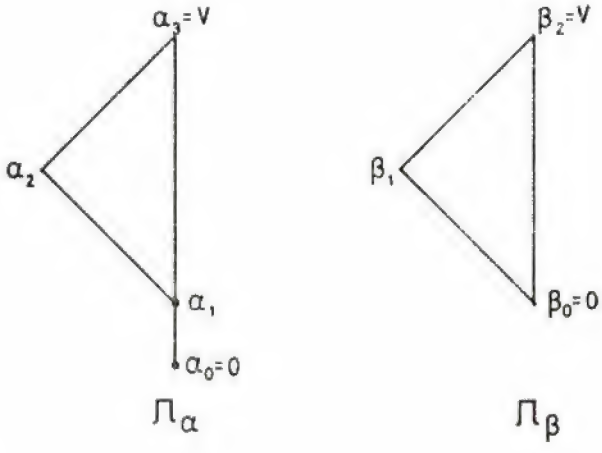
Sejam dados dois reticulados $(\Omega_\alpha, \nabla, \Delta)$ e $(\Omega_\beta, \nabla, \Delta)$. Forma-se o producto cartesiano $\Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Consideremos um conjunto $G \subseteq \Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Se quaisquer 2 elementos de G forem comparáveis entre si, G é ordenado pela relação de ordem *dominância* (estricta ou lata conforme o caso).

A2.3.8 — Cadeias Maximais

Empregando a relação de ordem ω definido num reticulado é possível partindo de (O) ou (V) atingir respectivamente (V) ou (O). Escolhendo entre todas as cadeias assim construídas aquelas que não tenham elementos comuns (com excepção de O e de V) obtém-se o conjunto de cadeias maximais do grafo.

Esta definição autoriza que existam mais do que um conjunto distinto de cadeias maximais.

A2.3.9 — Exemplo de um producto cartesiano de reticulados



Forme-se o producto cartesiano $\Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Os pares que pertencem a esse producto são:

$$(\alpha_0, \beta_0) \quad (\alpha_1, \beta_0) \quad (\alpha_2, \beta_0) \quad (\alpha_3, \beta_0)$$

$$(\alpha_0, \beta_1) \quad (\alpha_1, \beta_1) \quad (\alpha_2, \beta_1) \quad (\alpha_3, \beta_1)$$

$$(\alpha_0, \beta_2) \quad (\alpha_1, \beta_2) \quad (\alpha_2, \beta_2) \quad (\alpha_3, \beta_2)$$

Vamos usar o critério de dominância ($\geqslant$) — não estricta —.

$$(\alpha_3, \beta_2) \geqslant (\alpha_3, \beta_1) \geqslant (\alpha_3, \beta_0) \geqslant (\alpha_2, \beta_0) \geqslant (\alpha_1, \beta_0) \geqslant (\alpha_0, \beta_0)$$

O conjunto $G \subseteq (\Omega_\alpha \times \Omega_\beta)$ formado por estes pares está ordenado pelo critério da dominância não estricta ($\geqslant$).

Note-se:

i) Se Ω_α e Ω_β forem totalmente e estrictamente ordenadas, então obtém-se um reticulado vectorial (ver A2.4.3).

ii) Se Ω_α e Ω_β forem distributivos também $G \subseteq (\Omega_\alpha \times \Omega_\beta)$ será distributivo

A2.4 — ESTUDO DE ALGUNS CONJUNTOS RETICULADOS MAIS USADOS

2.4.1 — *Conjunto de Zadeh* $([0, 1], \uparrow, \psi)$

Verifica-se facilmente que $([0, 1], \uparrow, \psi)$ tem as seguintes propriedades:

a) Fechado

b) Associativo

c) Comutativo

d) Existência e unicidade de supremo e ínfimo

e) Idempotente

f) Absorvente

g) Distributivo

h) Pseudo-complementado

i) Aplicam-se os Teoremas de De Morgan

« $\dot{\wedge}$ » significa «o mínimo de»

«ψ» significa o «máximo de»

Neste conjunto [0, 1], e para qualquer elemento $\alpha_i \in \Omega \equiv [0, 1]$ é possível definir duas operações internas fechadas: o producto e a soma disjuntiva.

A2.4.1.1 — *Producto (*)*

$$\alpha_i * \alpha_j = \alpha_k = \alpha_i \cdot \alpha_j$$

onde (.) é o símbolo do producto vulgar.

Esta operação interna (*) definida em [0, 1] é:

— fechada

— associativa

— comutativa

— «O» é o elemento absorvente

— «1» é o elemento neutro

A2.4.1.2 — *Soma disjuntiva (T)*

$$\alpha_i \, T \, \alpha_j = \alpha_m = \alpha_i + \alpha_j - \alpha_i \cdot \alpha_j$$

onde

«+» é a soma usual

«−» é a diferença usual

«.» é o producto usual

Note-se que sendo α_i e $\alpha_j \in [0, 1]$,

$$\alpha_i + \alpha_j \geqslant \alpha_i \; \alpha_j$$

donde o símbolo (—) pode aplicar-se e daí resulta

$$\alpha_m \in [0, 1].$$

A soma disjuntiva é uma operação interna definida em [0, 1]:

— fechada

— comutativa

— associativa

— O é o elemento neutro.

A2.4.1.3 — *As operações (*) e (T) são distributivas*

A2.4.1.4 — Tem interesse escrever a expressão de aplicação sucessiva da soma disjuntiva:

$$\alpha_1 \, T \, \alpha_2 \, T \ldots T \, \alpha_u =$$

$$= (-1)^0 \sum_{i=1}^{u} \alpha_i + (-1)^1 \sum_{i,j=1}^{u} (\alpha_i \; \alpha_j) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{i,\ldots,l=1}^{u} \underbrace{(\alpha_i \cdot \ldots \cdot \alpha_l)}_{k} +$$

$$+ (-1)^{u-1} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_u)$$

A2.4.1.5 — Pode definir-se o operador (−), significando $\alpha_i - \alpha_j$ a diferença vulgar, mas apenas se $\alpha_i \geqslant \alpha_j$

A2.4.2 — *Conjunto de Bool.*

Para este suporte $\Omega \equiv \{0, 1\}$ o reticulado $(\{0, 1\}, \dot{\wedge}, \psi)$ é:

a — fechado

b — associativo

c — comutativo

d — Existem supremo e ínfimo, sendo únicos

e — idempotente

f — Absorventes

g — Distributivo

h — Complementado:

$$\dot{\wedge} \; (0, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \psi \, (0, 1) = 1$$

i — Aplicam-se as leis de De Morgan

A2.4.3 — *Reticulado Vectorial (1)*

Sejam dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qualquer deles completamente ordenado pela relação de ordem estrita (>) — $\alpha > \beta$ significa $\alpha \neq \beta$ — e tendo um supremo e ínfimo.

Forme-se o producto cartesiano

(1) Ver exemplo em A2.3.9

$$\mathscr{A} = \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$$

Se usarmos a relação de dominação assim definida:

$$(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (b_1, \ldots, b_n)$$

$$\text{com} \quad (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A$$

$$\text{se} \quad a_i \geqslant b_i \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$$

então o conjunto $\mathscr{A}$ é um reticulado distributivo mas não complementado. Com efeito:

a) — Fechado

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, b_i, \ldots)] = (\ldots, c_i, \ldots)]$$

onde $\forall_i, c_i = \nabla (a_i, b_i)$ e como A_i é completa e estritamente ordenado $(c_i = a_i)$ ou $(c_i = b_i)$.

Identicamente para (Δ).

b — Associativo (*)

c — Comutatividade (*)

d — Todos os A_i têm um supremo e um ínfimo

e — Idempotentes (*)

f — Absorventes (*)

g — Distributividade

g — Distributividade

$$\nabla \Big[(\ldots, a_i, \ldots) \Delta [(\ldots, b_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)] \Big] =$$

$$= \Delta \Big[\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, b_i, \ldots)], \nabla$$

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)] \Big] =$$

$$= \Delta [(\ldots, b_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)] = (\ldots, g_i, \ldots)$$

em que

$$g_i = \Delta (b_i, c_i), \ \forall i$$

e

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, g_i, \ldots)] = (\ldots, h_i, \ldots)$$

$$h_i = \nabla [a_i, \Delta (b_i, c_i)]$$

Por outro lado

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, b_i, \ldots)] = (\ldots, l_i, \ldots)$$

$$l_i = \nabla (a_i, b_i), \forall i$$

$$\nabla [(\ldots, a_i, \ldots), (\ldots, c_i, \ldots)] = (\ldots, m_i, \ldots)$$

$$m_i = \nabla (a_i, c_i), \forall i$$

e

$$\Delta [(\ldots, l_i, \ldots), (\ldots, m_i, \ldots)] = (\ldots, n_i, \ldots)$$

$$n_i = \Delta (l_i, m_i) = \Delta [\nabla (a_i, b_i), \nabla (a_i, c_i)]$$

mas A_i é completa e estritamente ordenado e portanto distributivo e daí

$$h_i = \nabla [a_i, \Delta (b_i, c_i)] =$$

$$= \Delta [\nabla (a_i, b_i), \nabla (a_i, c_i)] = h_i$$

h — Não é complementado em geral a não ser que cada A_i o seja (conjuntos de Bool).

2.4.4 — *Reticulado Lexicográfico*

Será um reticulado vectorial com os elementos totalmente ordenados.

ANEXO 3

A3.1 — *Funções ordinais de um grafo vulgar sem circuitos.*

Seja $G \subseteq \mathcal{U}^2$, finito, anti-simétrico e sem circuitos.

Ψ a família de todas as aplicações (funcionais ou não) de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{U}$

$\psi \in \Psi$ um membro da família ψ.

ψ^{-1} a aplicação inversa de ψ.

Define-se, de um modo geral, N_i, um sub-conjunto vulgar, do seguinte modo:

$$N_i = \left\{ u_j : \psi_G^{-1} (u_j) \subset \bigcup_{k=0}^{p-1} N_K \right\}$$

onde

$$u_j \in \mathcal{U} \text{ e } 0 \leqslant K \leqslant p-1 \quad K, p \in N$$

$$N_0 = \left\{ u_j : \psi_G^{-1} (u_j) = \varnothing \right\}$$

e $p \in N$, mais pequeno, tal que:

$$\psi_G (N_p) = \varnothing$$

(*) É óbvio a partir da definição.

Os sub-conjuntos (vulgares) N_i , $i \in \{0, \ldots, r\}$ formam uma partição de $\mathcal{U}$ e estão estrita e totalmente ordenados, isto é:

$$(k < l) \Leftrightarrow (N_K < N_l)$$

Função ordinal dum grafo vulgar sem circuitos é definida como segue:

Nível de partição é dado pelo índice da partição. Assim, N_k tem o nível ou ordem) k.

$$Q(u_i) = k \text{ se } u_i \in N_k$$

A3.2. — *Extensão da noção de função ordinal a grafos com circuitos*

Para o efeito formam-se as classes de equivalência do grafo G dado, onde a relação de equivalência é: «existe um caminho de u_i para u_j e de u_j para u_i ». Os conjuntos assim formados e máximos formam classes de equivalência e constituem uma ordem total ou parcial. Se for total teremos a função ordinal desejada. Se for parcial construa-se o grafo vulgar *sem circuitos* a partir dessas classes e a função ordinal desse grafo sem circuitos será a função ordinal desejada.

Na figura está representado uma parte de um grafo onde existe uma circulação entre os pontos u_1, u_2, u_3, u_4.

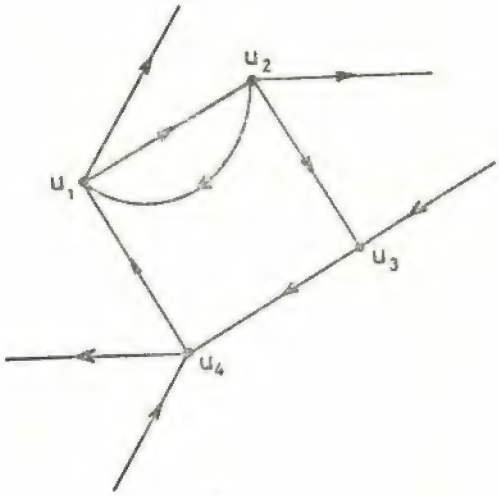


FIG. 1

Esta circulação pode descrever-se pela *equivalência* referida ao princípio: «existe um caminho de u_i para u_j e de u_j para u_i ».

Não sendo possível declarar quem *precede* quem, os quatro elementos u_1, u_2, u_3, u_4 são tratados como se se «fundissem» num único elemento u_0^* e a figura acima pode ser substituída por esta outra

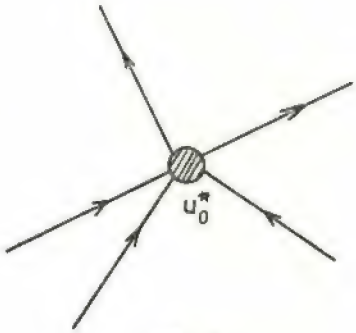


FIG. 2

Desta forma suprimem-se os circuitos e então cai-se na situação geral de grafos sem circuitos.

Por exemplo, na fig. 3

1, 2 e 3 é um circuito (I)

9, 10 e 11 é um outro circuito (II)

4, 5, 6 e 7 é outro circuito (III)

7, 6 e 8 *não* é circuito

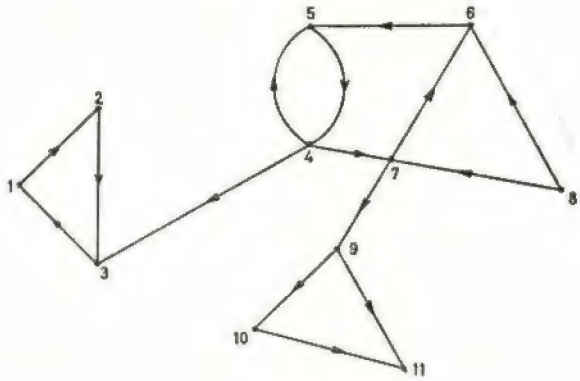


FIG. 3

Na fig. 4 está repreentado a forma simplicada e sem circuitos do grafo dado.

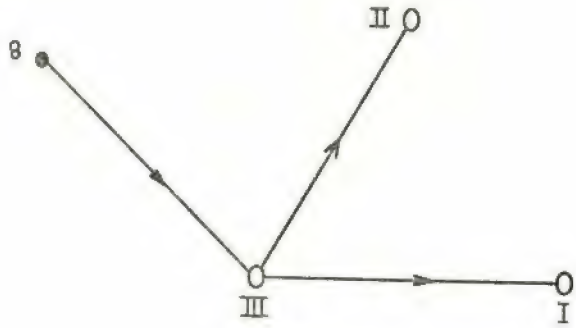


FIG. 4

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
international Conference of the Tool and Die Industrye	Viena — Áustria Maio - 77
IV Assemblea General del Centro National de Investigaciones	Madrid — Espanha 31 de Maio a 31 de Junho - 1977
Third International Symposium in Hidrology	Colorado State University — U. S. A. 27 a 29 de Junho - 1977
The Second International Conference on Transfer of Water Resources Information	Colorado State University — U. S. A. 30 de Junho a 2 de Julho - 77
Faire International Soudage et Découpage	ESSEN — R. F. A. 21 a 28 de Setembro - 77
L 'INTERPACK' 78 — 8.ª Feira Internacional de Máquinas de Embalar	DÜSSELDORF 8 a 14 de Junho - 78
1 ière Foire Specialisée International sul la Téchnique Sidérurgique	Dusseldorf — R. F. A. Junho - 1979

C.D.U. 378.962.001:624(43-15)

Education and research in Mechanics in the Federal Republic of Germany (*)

E. Becker (**)

RESUMO

Considerações sobre os sistemas de ensino e investigação da Engenharia e da Ciência na Alemanha Federal, a propósito do tema central da Mecânica, apresentadas na sessão sobre ensino e investigação do 1.º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada (Dezembro de 1974).

ABSTRACT

Topics on education and research in Mechanics in Federal Germany, presented at the session on education and research of the 1st. Portuguese National Congress of Theoretical and Applied Mechanics (December 1974).

I am not quite sure of what was expected of me when I was invited to talk at this Symposium. Therefore, you just have to be satisfied with what I am going to say, even it is not exactly what you would like to hear.

I want to divide my talk into two sections: First I shall say a few words on education, and then I will present a very brief survey over research establishments that are active in the field of mechanics in West Germany.

Let me start with a rather pessimistic note. If you look back at the last 70 years of the history of mechanics you will note that at the beginning of that period Germany was one of the undisputed leaders in education and research in mechanics. This was a time when mechanics was still deemed the indispensable basis of engineering education, and it was a time when many mathematicians still considered mechanics to be «the paradise of the mathematical sciences», as Leonardo da Vinci once said.

Today, at the end of these 70 years, the picture has changed considerably: On the one side, mathematicians are ever more turning their backs to applications; they pursue fashionable abstractions, unimpeded by the messy realities of applied problems. On the other side, as a reaction to that development, there is a growing tendency of our engineering departments to reduce the role of the theoretical sciences like mathematics and mechanics in the engineering curricula in favor of more «relevant» subjects, which are thought to be of more immediate applicability. Hence there is a growing gap between mathematics and engineering. This gap could, and should, be bridged by mechanics. However, the desire to span the widening gap, puts more and more strain on mechanics. Some of my colleagues, who are still more pessimistic than I am, are even afraid that mechanics might not survive, as an independent subject in the engineering curricula, a further increase of the gap.

These remarks refer to my country. Yet, I think that they also describe the situation in some of our neighbor countries. To some degree the tendency I have described seems to be universal.

EDUCATION

Let me now turn, after these melancholic remarks, to the education of people who are going to be active in mechanical science. By that I mean people working on research problems or research — related development problems in solid or fluid mechanics. Traditionally, a large part of these people has an engineering education as background; to a lesser, but still considerable degree, they were educated as mathematicians or physicists. Take as an example my professorial colleagues at the Institute of Mechanics of the Technical University of Darmstadt: We are eight professors; two of us were educated as mathematicians, two (including me) as physicists and four as engineers. The numbers at other technical universities are similar.

Because engineering is the main source for providing research workers in mechanics, let me explain,

(*) Paper presented at the 1st Portuguese National Congress for Theoretical and Applied Mechanics.

(**) Professor of Mechanics, Technische Hochscule Darmstadt.

at least cursorily, our system of educating engineers. This might be of some interest to you, in particular since at the present time a change of that systems is under way.

Traditionally, we had a two-lane road of engineering education. The first lane leads to the academically educated «Diplom»-engineer, the second lane to the «Graduate» engineer whose education has a more pratical orientation. Young people who want to become «Diplom»-engineers have to change after four years of compulsory primary school to a secondary school («Oberscule» or «Gymnasium»). After attending secondary school for nine years and after successfully passing the final examination of that school, the young people are allowed to study any subject at any German university. Particularly, they are entitled to study engineering at one of our technical universities or at any other university which has an engineering department.

Here, I should explain that we used to have two types of universities in Germany: universities proper and technical universities. Both types of universities have in common, among other things, that they are the only institutions of higher education which are entitled to award doctors' degrees. The traditional universities teach law, economics, humanities, medicine, mathematics and natural sciences, but no engineering subjects. The traditional technical universities teach, at the same academic level, natural sciences, mathematics and engineering, but no humanities and no medicine. Incidentally, the position of mechanics between mathematics and engineering is reflected by the fact, that at least one traditional university, the University of Göttingen, has a chair of mechanics since the beginning of this century, though it has no other engineering chairs.

Without going into details, I might mention that the difference in subjec matter covered by the two types of universities is gradually disappearing: A number of the traditional universities, and nearly all of the universities founded after the war, are now taking up engineering. Likewise, the technical universities are increasingly turning to the humanities and to medicine.

After 5 - 6 years at a technical university the student passes a final examination and takes the degree of «Diplom»-engineer. If he wants so, he may stay for 2 - 4 more years, doing graduate work with the aim of attaining a doctor's degree in engineering. Most of the research workers in mechanics come out of this group of students. The education in mathematics and physics runs along quite similar lines and need not be explained here.

Now, some words about the second lane of engineering education: Here the student usually first completes primary school at the age of 14 - 15. Then he learns, for 3 - 4 years, a trade as an apprentice, at the same time attending a special trade school. After successful completion of trade school and apprenticeship, the young fellows go on to one of the many engineering schools, traditionally called «Technikum». At these schools they receive a sound training with much emphasis on the pratical aspects of engineering and less stress on the theoretical side. Of course, a deeper theoretical foundation of engineering can not be provided at these schools, because the students lack the training in mathematics that is (or was) supplied by our secondary schools. — After 3 years the student has to pass a final examination and then he leaves the engineering school as a «Graduate»-engineer. I should say that in the past a small number of them went on to a university, studying engineering there and finally receiving the degree of «Diplom»-engineer.

Now, experience has shown, that Graduate-engineers are often doing the same type of work as Diplom-engineers, for example in industry, but also in the civil service. However, they are often paid a smaller salary. And this is one of the more important reasons that trouble started in our system of engineering education. — I should say, that another reason was the question of compatibility of engineering degrees in the Common Market Countries; this is the same type of problem as already mentioned by Professor Zienkiewicz. — Of course, it is only rational and just, that the same type of work should be paid with the same amount of money. Therefore, it would also seem rational and just to abandon a system of payment which is based on a *formal* qualification of the employee, namely on his academic degree, and not on the type of work he is doing. However, in my country, the gospel of the equality of all men is interpreted in a rather strange way, and we are told that the unsatisfactory situation can be changed only by giving everybody the same type of education, regardless of his capabilities and, perhaps, even regardless of his desires.

As a consequence of this rather amazing theory, at the present time the official educational policy of the Federal Republic and its member states tries to merge the former engineering schools with the universities, thereby forming so-called «Comprehensive Schools of Higher Education» («Gesamthochschulen»). Six of these merged schools have already been established. As a matter of fact, this change goes parallel to a corresponding change in the primary and secondary school system, but it would lead too far astray to explain this here.

In these new comprehensive superuniversities all types of engineers will be educated, and all of them will receive the same title of «Diplom»-engineer. Yet, funny as it may sound after what I have said about the reasons for that change, there will still be a difference between two types of «Diplom»-engineers: It is true, that during the first two years all engineering students will take the ame courses. But then comes a separation: One part of the students will go on for only one further year, taking courses with a practical orientation. After a final examination they will become «Diplom-engineer of the first kind»; these correspond roughly to the former Graduate engineers. The other part of the students proceeds for two more years, taking courses with more emphasis on the scientific and theoretical aspects of engineering. They become «Diplom-engineers of the second kind»; these corres-

pond to the former Diplom-engineers. If they want so, they can complete their education with a doctor's degree after that. (*)

Now, it is quite clear that this new system of engineering education has obvious and serious disadvantages. Here I want to mention only one drawback which has a special significance with respect to the education of people who are going to become active in mechanics research: The coeducation of the two types of engineers mentioned during the first two years will necessarily be accompanied by a deterioration of the scientific and academic level of the courses in the basic sciences, mechanics included. This is so for two reasons: The first reason is the inhomogeneity of the student body. The student body will include a large number of students who have neither the ability nor the desire nor the need to study the more theoretical aspects of engineering. The contents of the courses, however, have to satisfy the needs of the majority of the students. Therefore, those students who want to proceed after the first two years with the more advanced courses leading to the «Diplom-engineer of the second kind» will do so with insufficient preparation. — The second reason is the extreme inhomogeneity of the faculty. Besides the former research-motivated university professors the faculty will include the former engineering school teachers. These are usually engineers with some practical experience, but in most cases with neither the capability nor the readiness to do research work or any other academically advance work. It is quite clear that their standards will influence the level of the courses. It is interesting in this connection to note that the strongest opposition to the creation of comprehensive universities comes from the former engineering school teachers who are — justifiedly — afraid that they will be second class teachers only at the new universities.

Without doubt, this development is a serious danger for mechanics, because the continuation of mechanics as a science depends on a steady supply of academically educated engineers with a high quality grounding and interest in the theoretical aspects of engineering.

They are many people today who think that «change» is synonymous with «progress». Yet, change does not necessarily mean a change to the better. I think that the creation of comprehensive universities is a change in the wrong direction. A system of education that neglects the truth that people differ in their abilities, desires and expectations cannot claim to be really progressive.

RESEARCH

The research establishments active in mechanics may be divided into three categories with different organizational structure:

1. University institutes, most of them at technical universities. Support is provided mainly by the government of the state in which the university is located, but a sizable part of the money for research is also provided by the German National Science Foundation (Deutsche Forschungsgemeinschaft, DFG) and a smaller part is earned through contract work. The German National Science Foundation is an independent funding agency for promotion and support of scientific research. It derives the largest part of its income from the federal government and the state governments and a smaller part from industry. The Foundation distributes the money, after a careful review of research proposals by qualified outside scientists, with the purpose of supporting specific research projects as well as supporting larger groups of scientists working jointly on interdisciplinary projects, mainly at the universities.

2. Industrial research institutes; many of them are part of big industrial companies, others are run jointly be several companies. Support comes nearly exclusively from industry.

3. Independent research institutes. These are supported partly by the state governments and the federal government, partly by money from industry (through contract work) and partly by the National Science Foundation and other foundations.

Besides these three types of institutes there are also governmental research establishments. However, as these play no prominent role in mechanics research, let me omit them. Also, because I am not really familar with industrial research organizations I shall disregard them. Let me only mention that traditionally the aircraft industry was at the forefront of research in mechanics, and this is still so. Of course, today, the term «aircraft industry» is meant to encompass the complete aero-space industrial complex.

At the present time, there is a growing tendency to reduce the research activities at the universities and to favor an increased teaching load. Therefore, the contribution of the technical universities to research in mechanics may be declining at the present time; but it still represents the largest and most important contribution. At every technical university, and also at those other universities which have engineering departments, you will find a group of professors, together with their assistants and coworkers, who are responsible for teaching the basic mechanics courses for all engineering students. These are also the people who do research in mechanics in the narrower sense. Usually from 5 - 50 of these people are working together in special university institutes of mechanics. — In order to make clear my terminology, let me say that the universities are subdivided into departments, and that the departments are again subdivided into institutes. This is a little simplification, but it suffices for the present purpose.

(*) Note added during proofreading: Experience has shown that nearly all students of the comprehensive universities try to get the higher qualification of Diplom-engineer of the second kind, because they think that this increases their chances for higher pay after their graduation.

Traditionally the university institutes of mechanics are heavily loaded on the side of solid mechanics: The research subjects range from rigid body dynamics and vibrations to elasticity, visco-and thermoelasticity, plasticity, fracture mechanics etc. Research might be experimental or theoretical or both. Only at a very small number of universities, including my own university, fluid mechanics is represented within these institutes. The institutes of mechanics may form an independent department of mechanics, as is the case at my university. At other universities different institutes of mechanics may be part of different engineering departments; this is perhaps the most frequent case. At still other universities the mechanics institutes may be part of the department of mathematical and physical sciences. This was the case at my university, before a reorganization split up the former big departments into a number of smaller ones.

Due to the historical development, the teaching and research in fluid mechanics is usually done by separate institutes of fluid mechanics. Most of them are part of the mechanical engineering department. The dichotomy between solid and fluid dynamics is certainly not justified in view of the basic unity of mechanics and the didactic advantages to be derived from a unified approach to both solid and fluid mechanics. But despite all the sweeping reforms going on at the present time, it is extremely difficult to change *such* anachronistic traditions!

Of course, mechanics as a subject has no clearcut boundaries. So you will find in the engineering departments many other institutes where research in mechanics in a wider sense is done. I mention the aerodynamics and aerospace institutes, the hydraulics institutes and the institutes of structural mechanics in the civil engineering departments.

At the present time we have, in West-Germany, 28 universities, 9 technical universities, 6 comprehensive universities and 2 military academics with university status. Four universities and one comprehensive university are on the planning stage. At about 15 technical universities and other universities mechanics is represented in some form. Not all the subdivisions of mechanics are represented in equal strengh at all the places indicated. As I am a fluid dynamicist myself, let me point out that rather strong centers in fluid mechanics, including gas dynamics and rheology are to be found at the technical universities of Aachen, Berlin, Braunschweig, Darmstadt, Karlsruhe, München, Stuttgart, and at the universities of Dortmund, Freiburg and Göttingen.

In the category of the independent research institutes there are, apart from a few smaller institutes, 3 big research establishments. All of these pursue, among other topics, also research in mechanics: A. The Max-Planck-Society, B. The German Aero-Space Research Establishment (Deutsche Forschungs-und Versuchsanstalt für Luft-und Raumfahrt, DFVLR), C. The Fraunhofer-Society.

A) The most famous of these organizations is the Max-Planck-Society, which was founded in 1911 under the original name «Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft». At the present time the Max-Planck-Society comprises 48 research institutes, nearly all of them in the field of natural sciences. These institutes are spread all over Germany. Of these 48 institutes only the Max-Planck-Institute of Fluid Dynamics in Göttingen is relevant in the present context. It was established in 1924, and its first director from 1924 till 1946 was the famous Ludwig Prandtl. He was succeeded by Albert Betz, a wellknown aerodynamicist and longtime coworker and friend of Ludwig Prandtl. After Betz retired, Walter Tollmien became director; he is known first of all for his pioneering work on the stability of laminar boundary layers. After Tollmien's death, about 5 years ago, the institute was reorganized. To the classical fluid dynamics and gas dynamics department a strong and active research group working in the field of molecular beams and low density flows was added. — It is certainly unnecessary to elaborate on the importance of the Max-Planck-Institute of Fluid Dynamics in the recent history of fluid mechanics!

There is only one further Max-Planck-Institute which I should mention here, because its subject area is at least adjacent to mechanics, and this is the Institute of Plasma Physics in München.

B) The second big research organization is the German Aero-Space Research Establishment (DFVLR). The DFVLR consists of 35 institutes plus 5 computing centers, spread over West-Germany. Contrary to the Max-Planck-Society the DFVLR includes many institutes which are active in solid and fluid mechanics. The whole establishment is divided into 6 groups of institutes:

Group I: Fluid Mechanics, with the following six institutes: 1. Aerodynamics (Braunschweig); this institute has a long tradition, going back to the twenties and being connected with names like Busemann and Schlichting. 2. Fluid Dynamics and 3. Dynamics of Rarfied Gases (Göttingen). These two institutes grew out of the former aerodynamic research institute in Göttingen. This aerodynamic institute was originally founded by Prandtl who was also its first director, later to be succeeded by Betz. The institute was (and still is) located on the same site as the Max-Planck-Institut of Fluid Dynamics. Both institutes worked always closely together, some of the scientific staff, in particular Prandtl and Betz themselves, holding double appointments in both institutes. 4. Applied Gasdynamics (near Köln). 5. Applied Mathematics and Mechanics (Freiburg); this institute is headed by Henry Görtler, who is president of IUTAM at the present time. The subject area of the institute is mainly mathematical fluid dynamics. 6. Institute of Turbulence Research (Berlim).

Group II: Flight Mechanics, with the following three institutes: 1. Flight Mechanics (Braunschweig). 2. Flight Control (Braunschweig). 3. Dynamics of Aero-Space-Vehicles (München).

Group III: Properties and Strength of Materials and Structures, with the following institutes: 1. Aircraft

Construction (Braunschweig). 2. Aero-elasticity (Göttingen); this institute too is an outgrowth of Prandtl's original aerodynamic research institute. 3. Materials Research (near Köln). 4. Methods of Construction (Stuttgart).

Group IV: Propulsion and Energetics, contains seven institutes, for example: institutes of plasma-dynamics, reaction kinetics, rocket propulsion, lubrication.

Group V: Electronics. This group contains three institutes, all in the München area. They are working, among other things, on control of and communication through satellites. These institutes cooperate with other European institutes and organizations responsible for operating the European and the German research satellites, wich have been put into orbit with US rockets.

Group VI: Space Physics, Space Simulation and Space Medicine contains three institutes.

The computing centers and a number of smaller institutes complete the DFVLR. The DFVLR has a total staff of about 4000 people. Among them is a lot of young and gifted and highly motivated scientists. Nevertheless, at the present time he DFVLR has some trouble with regard to its future development. These troubles are more or less caused by the lack of a clear direction in German and European aero-space research. Fortunately, this trouble does not affect too seriously those member institutes of the DFVLR which do fundamental research in mechanics, like the fluid mechanics institute in Göttingen and Görtler's institute in Freiburg.

C) The last of the big research establishments is Germany which I want to mention is the Fraunhofer-Society. The Fraunhofer-Society is devoted to applied science. Todak, it consists of 17 institutes plus 10 socalled «working parties», i.e. smaller institutes. I mention only the institutes in the broad field of mechanics: 1. Solid mechanics (Freiburg); the institute works mainly in fracture mechanics. 2. Ernst-Mach-Institute for Shock-Wave Research (Freiburg). This institute works closely together with the Franco-German Research Institute at St. Louis (near the meeting point of France, Germany and Switzerland). The Franco-German Institute is a jointly government establishment with main research emphasis on high speed mechanics, ballistics, hypersonic flow, detonation and combustion. 3. Strength of Materials (Darmstadt). There are working parties for: Space research (Freiburg), applied materials research (Bremen), ballistics (near Basel), and others more.

I am aware of the fact that I could present only a very incomplete and sketchy picture of the German mechanical research landscape. However, the restriction of time forbids me to go deeper into the subject.

Perhaps I should conclude by saying a few words about organizations that support visits of foreign scientists and scholars to German universities or research institutes. Here I have to mention three organizations:

1. The Alexander von Humboldt-Foundation, 2. The German National Science Foundation (DFG), 3. The German Academic Exchange Service (DAAD).

The most important of these is the Alexander von Humboldt-Foundation, with a tradition of more than 100 years. At the present time the foundation supports visits of qualified young foreign scientists (between 25 and 45), with complete university education, for periods of 1 - 2 years. The number of grants per year is about 500. The grantees are paid a salary which is comparable with the average salary paid to German scientists of the same age group.

The German National Science Foundation supports mainly guest professorships. The Academic Exchange Service supports qualified foreign students, below 32 years of age, who want to study at a German university or research institute. Besides that, it supports visits of foreign scientists of less than three months duration. The embassies of my country provide detailed information on all the organizations mentioned and on the proper procedure for application.

NÚMERO 438 FEVEREIRO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII

C.D.U. 551.49:519.241.25

Continuous Hydrological Time-Series Discretization (*)

Luís Valadares Tavares (**)

ABSTRACT

The available information about many continuous hydrological time series $\{X_t\}$ is often given by continuous time records with given finite duration and in many cases (i.e. rainfall and runoff records) the autocovariance function of X_t can be approximated by a function or exponential type. Once the data have been deseasona lized, stationarity is usually assumed. A discretization technique is required to estimate the mean and the variance of X_t which implies setting a value for the lag of time, L, between any two successive observations taken from the continuous record. The greater the time lag, the smaller is the number of used X_t values, the weaker is the dependence between them and the shorter is the required computing time. The aim of this paper is to study the three effects to make possible the selection of an optimal value for L. Numerical results of general use are derived and presented. Obviously, these conclusions also can be applied to any nonhydrological time series providing the assumed statistical assumptions are acceptable.

RESUMO

A informação disponível sobre séries hidrológicas contínuas, $\{X_t\}$, resumem-se frequentemente a registos cronológicos com duração finita. Em muitos casos (por exemplo, para precipitações e escoamentos) a autocovariância de $\{X_t\}$ tem um andamento exponencial e a hipótese de estacionariedade é aceitável para a série dada desde que se tenham filtrado as suas componentes sazonais.

Para estimar a média e a variância de $\{X_t\}$ é necessário discretizar os dados e, portanto, adoptar um valor para o intervalo de tempo, L, que medeia entre observações consecutivas lidas no registo conhecido. Quanto maior L, tanto menor é o número de elementos da amostra assim obtida mas tanto menor é a sua interdependência bem como o tempo e o trabalho necessários ao seu cálculo. O objectivo deste artigo consiste em estudar estes efeitos de modo a poder optimizar L apresentando-se alguns resultados de uso geral.

Como é óbvio, as conclusões obtidas são também aplicáveis a séries não hidrológicas desde que satisfaçam as hipóteses admitidas.

INTRODUCTION

Considering the recent advances achieved in the field of recording systems for values of basic hydrologic quantities (e. g., rainfall and runoff) it is expected that these records will be a continuous series in the near future. These data are normally used to estimate the time-series statistical parameters, among which mean and variance are the most important ones. Serial dependence is obviously a relevant feature in this estimation.

The time dependence of hydrologic variables has been examined by many authors and the following general conclusions (3) can be drawn: (1) The autocovariance function $[R(i)]$ is usually significantly different from zero, and (2) once the data have been deseasonalized, stationarity sometimes can be assumed. Often, the type of the function, $R(i)$, is one of those represented in Fig. 1.

In Ref. 1, several processes with $R(i)$ of types a and b are described. Some common examples are mentioned in Table 1.

Thus, an important problem in hydrology is to optimize the method of estimating the mean and variance of continuous time series with the autocovariance function of type a or b using continuous samples of given finite duration. To estimate these parameters, data are discretized after setting a value for he time lag (L) between any two successive observations (X_t, X_t) taken from the continuous record. Thus, the selection of L must be studied.

(*) Este trabalho foi publicado no JOURNAL OF THE HYDRAULICS DIVISION da AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS, em Janeiro de 1975 (p. 49-63) e baseia-se no capítulo II (Princípios e potencialidades da inferência Estatística) da dissertação «Métodos de Simulação Hidrológica» que o autor apresentou para obtenção do grau de doutor em Ciências de Engenharia (Hidráulica) pela Universidade Técnica de Lisboa.

(**) Centro de Sistemas Urbanos e Regionais das Universidades de Lisboa (INIC), IST, Av. Rovisco Pais, Lisboa.

TABLE 1 — Models for Types a and b

MODEL (1)	TYPE OF $R(i)$ (2)
$(X_t - \mu) = \Phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \varepsilon$; with $\Phi_1 > 0$	a
$(X_t - \mu) = \Phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \Phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t$; with $\Phi_1 > 0$ and $\Phi_2 > 0$	a
$(X_t - \mu) - \Phi_1 (X_{t-1} - \mu) = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_t$; with $\Phi_1 > 0$, $\theta_1 > 0$, and $\theta_1/\Phi_1 < 1$	a
$(X_t - \mu) = \Phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$; with $\Phi_1 < 0$	b
$(X_t - \mu) = \Phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \Phi_2 (X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$; with $\Phi_1 < 0$ and $\Phi_1 > 0$	b
$(X_t - \mu) - \Phi_1 (X_{t-2} - \mu) = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_t$; with $\Phi_1 < 0$ and $\theta_1 > 0$	b

As L is increased, the serial dependence between the discrete values is decreased so that each used value (X_t) contains a higher volume of information that is not given by other used values. Increasing L implies getting a smaller number of discrete values (N) if a finite duration continuous historical record is available. Obviously, this method requires a smaller amount of computational work.

Therefore, the optimal value of L is the result of a compromise between the volume of information (I) extracted from the record and the computing effort spent to process that information (E) .Thus, I as function of L must be studied and is examined subsequently.

The value of E is afunction of N and its expression depends greatly on the working facilities and objectives of each particular case. Therefore, postulating a general

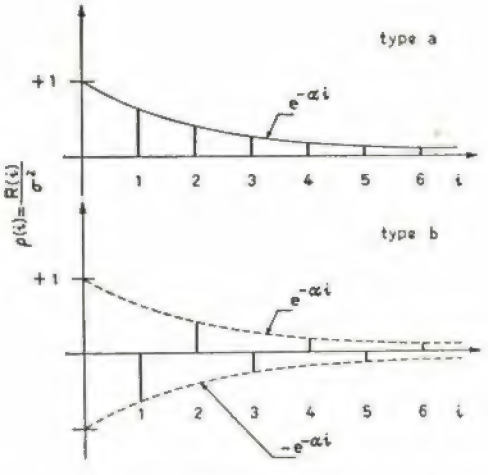


FIG. 1 — Types a and b of Correlation Function [$\rho(i)$]

expression for the function, E, is not very realistic. It is preferable to analyze the sensitivity of I to variations in L. Then, for any particular case, the optimal range of L values can be determined easily.

Many ways of measuring I have been proposed (2). Again, the most appropriated methods depend on the objectives of the study. However, all are functions of the variance (or the standard error) of the estimated parameters, as it is easy to calculate their values if the variances are know. Thus, the variance is basic to the definition of I and herein it will be studied as a measure of I.

UNBIASED ESTIMATOR OF MEAN (μ) AND ITS VARIANCE (V_1) AS FUNCTION OF L

It is well known that

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \tag{1}$$

such that $E(\hat{\mu}) = \mu$ and $N = \dfrac{N_0}{L}$ (2)

in which N_0 = an arbitrary integer constant.

To calculate the VAR ($\hat{\mu}$):

$$V_1 = \text{VAR}(\hat{\mu}) \tag{3}$$

$$V_1 = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)\right]^2 \tag{4}$$

Then

$$V_1 = \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j}^{N}(X_i - \mu)(X_j - \mu)\right] \tag{5}$$

$$V_1 = \frac{1}{N^2}\left[N\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{N}(N - i)\,\rho(i)\right] \tag{6}$$

Let S_1 be defined as

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N}(N - i)\,\rho(i) \tag{7}$$

TYPE a — If $R(i)$ is of type a:

$$\rho(i) = R^{|i|} \tag{8}$$

with $R = e^{-\alpha L}$. By definition, L is equal to1 if $N = N_0$ and $\alpha =$ an appropriate constant. Thus

$$V_1 = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{2\,\sigma^2}{N^2}\left[\frac{NR}{1-R} - \frac{(1-R^N)\,R}{(1-R)^2}\right] \quad (10)$$

$$\text{or} \quad V_1 = B\,\sigma^2 \quad (11)$$

$$\text{with} \quad A = \frac{2}{N}\left[\frac{NR}{1-R} - \frac{(1-R^N)\,R}{(1-R)^2}\right] \quad (12)$$

$$B = \frac{1+A}{N} \quad (13)$$

It is important to calculate the limit of V_1 as L tends to zero (LV_1). Then

$$LV_1 = \lim_{L\to 0} V_1 \quad (14)$$

$$LV_1 = \sigma^2 \lim_{L\to 0} \frac{1+A}{N} \quad (15)$$

$$\text{Because } R = e^{-\alpha L} \approx 1 - \alpha\, L \quad (16)$$

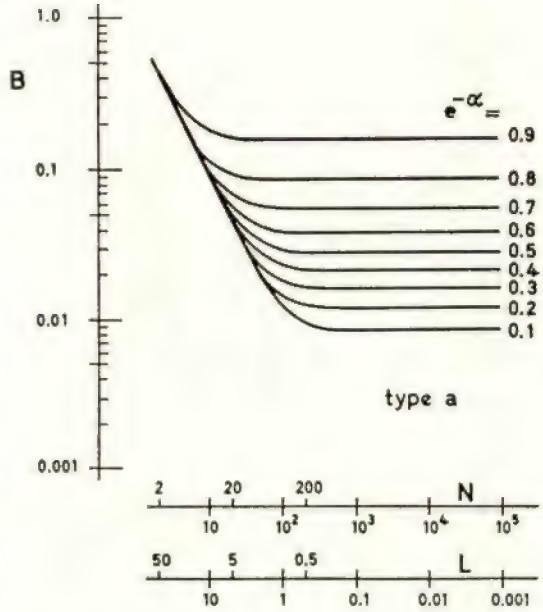


FIG. 2 — B as Function of N (or L) and of $e^{-\alpha}$ (type a)
Assuming $N_0 = 100$

one obtains

$$LV_1 \approx \left\{\frac{2}{N_0}\lim_{L\to 0}\frac{L\,(1-\alpha\,L)}{\alpha\,L} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{N_0^2}\lim_{L\to 0}\left[L^2\,\frac{R(1-R^N)}{(1-R)^2}\right]\right\}\sigma^2 \quad (17)$$

$$LV_1 \approx \frac{2\,\alpha\,N_0 - 2}{\alpha^2\,N_0^2}\,\sigma^2 \quad (18)$$

$$\text{or} \quad LV_1 \approx \frac{2}{\alpha\,N_0}\,\sigma^2 \quad (19)$$

The values of B are represented in Fig. 2, assuming that

$$N_0 = 100 \quad (20\ a)$$

$$e^{-\alpha} = 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5;\ \ldots;\ 0.9 \quad (20\ b)$$

$$L = 10^{-3};\ 10^{-2};\ 10^{-1};\ 0.2;\ 0.3;\ \ldots;\ 0.9;$$

$$1.0;\ 2.0;\ 5.0;\ 10.0;\ 20.0;\ 50.0 \quad (20\ c)$$

TYPE b — If $R\ (i)$ is of type b:

$$V_1 = \sigma^2\,B \quad (21)$$

with

$$B = \frac{1+A}{N} \quad (22)$$

and

$$A = \frac{2}{N}\,S_1 \quad (23)$$

such that

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \rho\,(i)\,(N-i) \quad (24)$$

Using $L < 1$ has no meaning any more because the correlation function of type b is not defined for $L < 1$. Thus, only L values greater than or equal to one will be considered.

An analytical expression for S_1 and S_2 also can be deduced for this type of $\rho\,(i)$. By definition:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} (N-i)\,(-\,e^{-\alpha})^{iL} \quad (25)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N-1} (N-i)\,e^{-2\alpha iL} \quad (26)$$

Therefore

$$S_2 \approx \frac{N\,R^2}{1-R^2} - \frac{R^2}{(1-R^2)^2} \quad (27)$$

and if L is even:

$$S_1 \approx \frac{N\,R}{1-R} - \frac{R}{(1-R)^2} \quad (28)$$

If L is odd:

$$S_1 = (N-1)\,(-R) + (N-2)\,R^2 +$$

$$+ (N-3)\,(-R^3) + \ldots + (-R)^{N-1} \quad (29)$$

Therefore

$$S_1 = \frac{N(-R + R^2 + R^3 - R^4) + R + R^3 - 2R^2}{(1 - R^2)^2} \tag{30}$$

because

$$R^N \approx 0 \tag{31}$$

assuming $N_0 = 100$; $e^{-\alpha} = 0.1$; 0.2; ...; 0.9; and L = 1, 2, 3, ..., 9, 10, 20. The values of B are presented in Fig. 3.

UNBIASED ESTIMATOR FOR VARIANCE (σ^2) AND ITS VARIANCE (V_2) AS FUNCTION OF L

The value, σ^2, is defined considering:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \hat{\mu})^2}{N}\right] = \frac{N-1}{N}\sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{N^2} E\left[\sum_{i=1}^{N-1} (N-i) R^i\right] \tag{32}$$

Then

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{\mu})^2\right] = (N - 1 - A)\sigma^2 \tag{33}$$

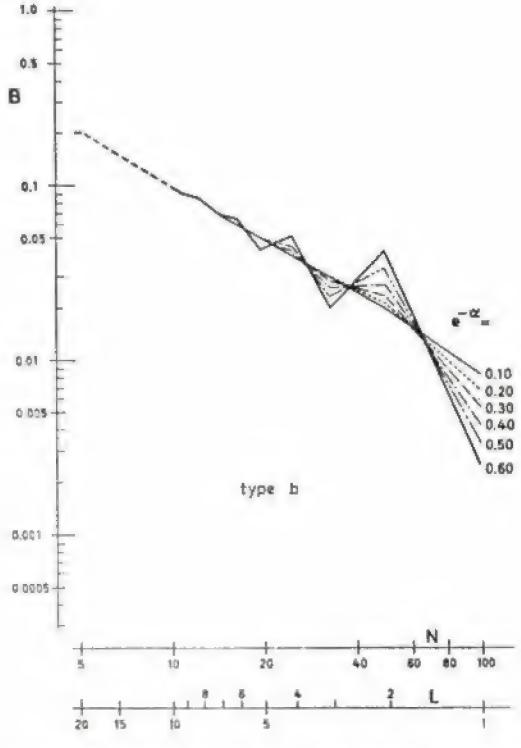


FIG 3 — B as Function of N (or L) and of $e^{-\alpha}$ (type b) Assuming $N_0 = 100$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{\mu})^2}{N - 1 - A} \tag{34}$$

in which A = the loss of degrees-of-freedom due to the serial correlation if the variance is estimated.

To calculate V_2, $\mu \approx \hat{\mu}$ is assumed. Thus

$$V_2 = \frac{1}{(N - A - 1)^2} \text{VAR}\left[\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2\right] \tag{35}$$

$$V_2 = \frac{1}{(N - A - 1)^2}\left\{\sum_{i=1}^{N} \text{VAR}\,(X_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \text{COVAR}\,[(X_i - \mu)^2, (X_j - \mu)^2]\right\} \tag{36}$$

Therefore, a relationship between COVAR $[X_i - \mu^2)$, $(X_j - \mu)^2]$ and COVAR $[X_i - \mu)$, $(X_j - \mu)]$ must be derived. If X and Y are two reduced normal variables:

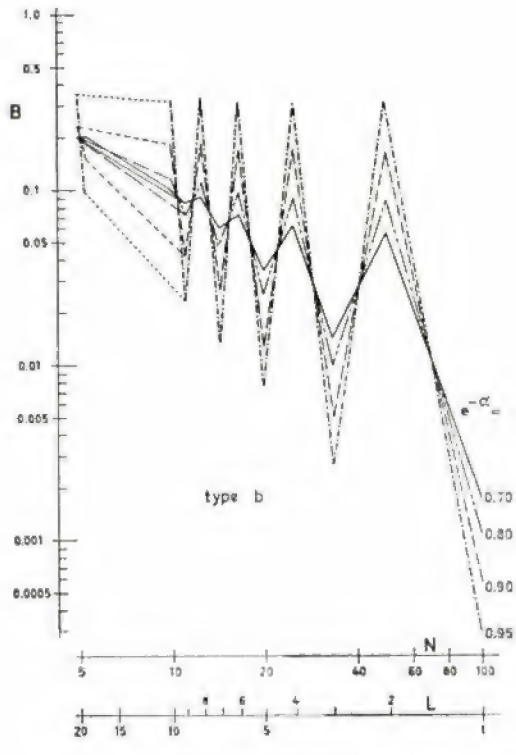


FIG. 3 — Continued

$$\rho\,(X^2, Y^2) = \frac{\text{COVAR}\,(X^2, Y^2)}{2} \tag{37}$$

$$\text{COVAR}\,(X^2, Y^2) = \int_{x^2=0}^{x^2=+\infty} \int_{y^2=0}^{y^2=+\infty} (X^2 - 1)\,(Y^2 - 1)\; f\,(X^2, \cdot\; Y^2)\; d\,(X^2)\; d\,(Y^2) \tag{38}$$

$$\text{COVAR}\,(X^2, Y^2) = \int_{x^2=0}^{x^2=+\infty} (X^2 - 1) \left[\int_{y^2=0}^{y^2=+\infty} (Y^2 - 1)\; f \cdot \left(\frac{Y^2}{X^2} \right) d\,(Y^2) \right] f\,(X^2)\; d\,(X^2) \tag{39}$$

such that $f\,(X^2, Y^2)$, $f\,(Y^2/X^2)$, and $f\,(X^2)$ = the probability density function (pdf) of $(X^2 \cap Y^2)$, Y^2 given X^2, and X^2, respectively. Then

$$\text{COVAR}\,(X^2, Y^2) = \int_{x^2=\infty}^{x^2=\infty} (X^2 - 1)\; [\rho(X, Y)]^2\; (X^2 - 1)\; f\,(X^2)\; d\,(X^2) \tag{40}$$

or

$$\text{COVAR}\,(X^2, Y^2) = 2\,[\rho(X, Y)]^2 \tag{41}$$

Thus

$$\rho\,(X^2, Y^2) = \rho^2\,(X, Y) \tag{42}$$

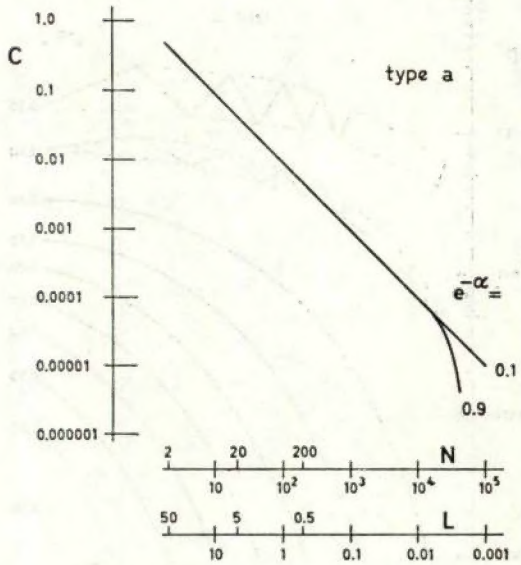


FIG. 4 — C as Function of N (or L) and of $e^{-\alpha}$ (type a) Assuming $N_0 = 100$

If X and Y are not normally distributed, but $f\,(X, Y)$ is approximately normal Eq. 42 is still acceptable. Otherwise, Monte-Carlo simulation must be used to estimate the relation between $\rho\,(X^2, Y^2)$ and $\rho\,(X, Y)$. Assuming Eq. 42:

$$V_2 \approx \frac{2\,\sigma^4}{N - A} + \frac{2}{(N - A)^2}\; 2\,\sigma^4\, S_2 \tag{43}$$

with

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N-1} \rho^2\,(X_i, X_{1+i})\,(N - i) \tag{44}$$

or

$$\frac{1}{2}\; V_2 \approx C\,\sigma^4 + D\,\sigma^4 \tag{45}$$

with

$$C = \frac{1}{N - A} \tag{46}$$

$$D = \frac{2\,S_2}{(N - A)^2} \tag{47}$$

TYPE a — If $R\,(i)$ is of the type a:

$$\rho\,(i) = R^{|i|} \tag{48}$$

$$S_2 = \frac{N\,R^2}{1 - R^2} - \frac{(1 - R^{2N})\,R^2}{(1 - R^2)^2} \tag{49}$$

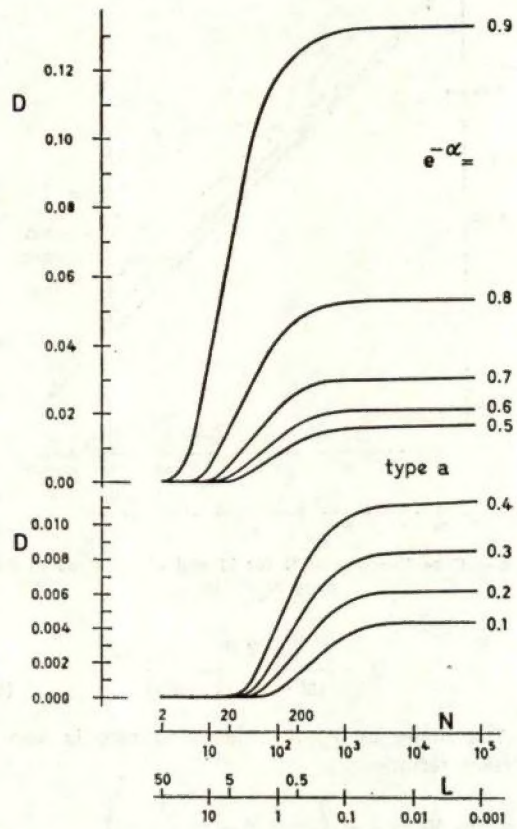


FIG. 5 — C as Function of N (or L) and of $e^{-\alpha}$ (type b) Assuming $N_0 = 100$

In Eq. 49, R^{2N} is negligible compared with the other terms. Thus

$$V_2 \approx \frac{2}{N-A}\left(\sigma^4 + 2\,\sigma^4\,\frac{1}{N-A}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{NR^2 - \dfrac{R^2}{1-R^2}}{1-R^2}\right) \qquad (50)$$

And if

$$L << N_0\,(1-R^2) \qquad (51)$$

then

$$V_2 \approx \frac{2}{N-A}\left(\sigma^4 + 2\,\sigma^4\,\frac{R^2}{1-R^2}\right) \qquad (52)$$

such that A is given by Eq. 12.

Using $N_0 = 100$, Eq. 51 is acceptable for $0.1 < R < 0.9$ if $L << 19$ (or $N >> 5$). In this case

$$C = \frac{1}{N-A} \qquad (53)$$

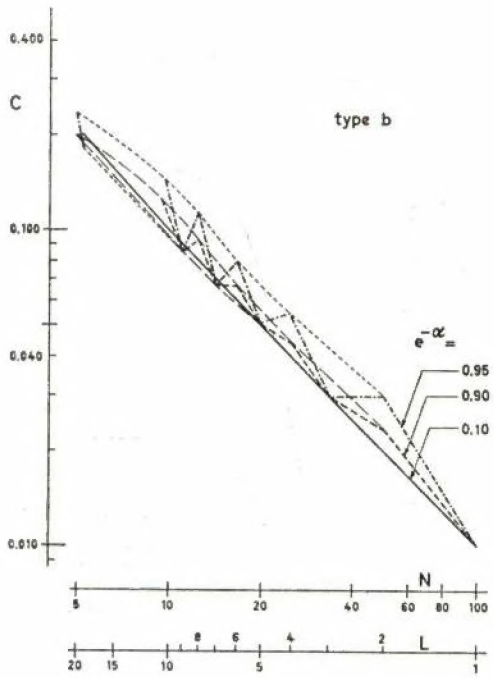


FIG. 6 — C as Function of N (or L) and of $e^{-\alpha}$ (type b) Assuming $N_0 = 100$.

$$D \approx \frac{2\,R^2}{(N-A)\,(1-R^2)} \qquad (54)$$

The limite of V_2 if L tends to zero is also an important result.

$$LV^2 = \lim_{L\to 0} V^2 \approx 4\,\sigma^4\left(\frac{1}{2\,\alpha\,N_0} - \frac{1}{4\,\alpha^2\,N_0^2}\right) \qquad (55)$$

because

$$\lim_{L\to 0}\frac{A}{N} = \frac{2}{\alpha\,N_0} \qquad (56)$$

and

$$\lim_{L\to 0}\frac{\dfrac{\sigma^4}{N}}{\dfrac{1-A}{N}} = 0 \qquad (57)$$

Therefore

$$LV^2 \approx 2\,\sigma^4\,\frac{2\,\alpha\,N_0 - 1}{2\,\alpha^2\,N_0^2} \approx \frac{2\,\sigma^4}{\alpha\,N_0} \qquad (58)$$

In Figs. 4 and 5 the values of C and D are presented for this type. The values of $e^{-\alpha}$ and L are those assumed in Fig. 2. The value of D was calculated using Eq. 50.

TYPE b — If $R\,(i)$ is of type b:

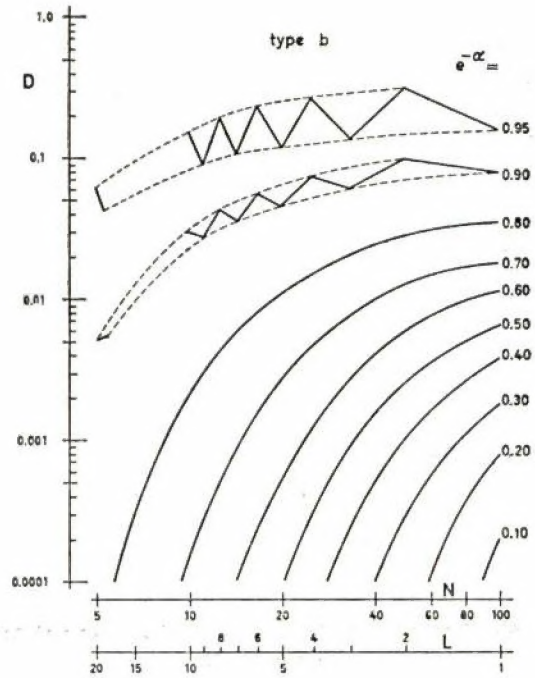


FIG. 7 — D as Function of N (or L) and of $e^{-\alpha}$ (type b) Assuming $N_0 = 100$.

$$\frac{1}{2}\,V_2 \approx C\,\sigma^4 + D\,\mu_4 \qquad (59)$$

with

$$C = \frac{1}{N-A} \qquad (60)$$

$$D = \frac{2\,S_2}{(N-A)^2} \qquad (61)$$

$$A = \frac{2}{N}\,S_1 \qquad (62)$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \rho\,(i)\,(N-i) \qquad (63)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N} \rho^2 (X_t, X_{t+i}) (N - i) \tag{64}$$

in wich S_1 and S_2 were calculated using Eq. 28 or Eqs. 27 and 29. The C and D values are presented in Figs. 6 and 7 using again $N_0 = 100$; $e^{-\alpha} = 0.1; 0.2; \ldots; 0.9$; and $L = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 20$.

CONCLUSIONS

For continuous stationary hydrologic time series with type a or b correlation functions the following conclusions can be derived:

1. The unbiased estimator of μ is in any case the classical function

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \tag{65}$$

2. To estimate the variance (σ^2), the serial dependence is responsible for an extra loss of degrees-of--freedom (A):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{\mu})^2}{N - 1 - A} \tag{66}$$

A can be calculated easily using Eqs. 12 and 23.

3. For any particular time series the variances of μ and σ^2 are functions of the discretization process defined by the L value:

$$V_1 = \text{VAR}(\hat{\mu}) = \sigma^2 B(L) \tag{67}$$

$$V_2 = \text{VAR}(\sigma^2) \approx 2\sigma^4 [C(L) + D(L)] \tag{68}$$

This last formula implies X distribution being normal or quasinormal.

The functions, $B(L)$, $C(L)$, are presented in the Figs. 2-7. These functions are far from linear with L. For the type a correlation function and introducing small errors, they can be approximated by

$$B(L) = p_B - q_B \ln \frac{100}{L}; \text{ if } s_B < L < t_B \tag{69 a}$$

$$B(L) = r_B; \text{ if } L \geqslant L_B \tag{69 b}$$

$$C(L) = p_C - q_C \ln \frac{L}{100}; \text{ if } s_C < L < t_C \tag{70 a}$$

$$C(L) = r_C; \text{ if } L \geqslant L_C \tag{70 b}$$

$$D(L) = p_D + q_D \ln \frac{100}{L}; \text{ if } s_D < L < t_D \tag{71 a}$$

$$D(L) = r_D; \text{ if } L \geqslant L_D \tag{71 b}$$

in which p_B, q_B, r_B, s_B, t_B, L_B, p_C, q_C, r_C, s_C, t_C, L_C, p_D, q_D, r_D, s_D, t_D, and L_D = positive parameters the values of which depend on the value of $e^{-\alpha}$. Therefore, for any particular record:

$$\frac{dV_1}{dL} = q_B \frac{\sigma^2}{L}; \text{ if } s_B < L < t_B \tag{72 a}$$

$$\frac{dV_1}{dL} = 0; \text{ if } L \geqslant L_B \tag{72 b}$$

$$\frac{dV_2}{dL} = + q_C \frac{2\sigma^4}{L} - q_D \frac{2\sigma^4}{L};$$

$$\text{if max } (s_C, s_D) < L < \min (t_C, t_C) \tag{73 a}$$

$$\frac{dV_2}{dL} = 0; \text{ if } L \geqslant \max (L_C, L_D) \tag{73 b}$$

Thus, the reduction rate of V_1 by decreasing L decreases with the inverse of L, and for L higher than L_B, increasing N is quite irrelevant to decrease V_1. The variation of V_2 with L depends on the values of α and of σ^4. In any case, for $L > \max (L_C, L_D)$, increasing N is also irrelevant to decrease V_2.

If the cost processing the data (E) is proportional to N:

$$\frac{dV_1}{dE} \text{ proportional to } - q_B \frac{\sigma^2}{N}; \text{ if } s_B < L < t_B \tag{74 a}$$

$$\frac{dV_1}{dE} \text{ proportional to } 0; \text{ if } L \geqslant L_B \tag{74 b}$$

$$\frac{dV_2}{dE} \text{ proportional to } - q_C \frac{2\sigma^4}{N} + q_D \frac{2\sigma^4}{N}; \text{ if}$$

$$\max (s_C, s_D) < L \text{ and } L > \min (t_C, t_D) \tag{75 a}$$

$$\frac{dV_2}{dE} \text{ proportional to } 0; \text{ if } L \geqslant \max (L_C, L_D) \tag{75 b}$$

Thus the effectiveness of increasing N to reduce V_1 or V_2 is either inversely proportional to N (Eqs. 74 a and 75 a) or equal to zero (Eqs. 74 b and 75 b).

4. The limits of V_1 and V_2 as L tends to zero can be deduced analytically if

$$\rho(i) = R^{|i|} \tag{76}$$

obtaining:

$$LV_1 = \frac{2\sigma^2}{\alpha N_0} \tag{77}$$

$$LV_2 \approx \frac{2\sigma^4}{\alpha N_0} \tag{78}$$

in which N_0 = an arbitrary value of N for which $L = 1$ by definition and α is defined as

$$\alpha = -\ln R_0 \tag{79}$$

such that R_0 = the correlation coefficient between successive X values, using $N = N_0$. If $N_0^* = K N_0$ and K = any real constant, the definition of X implies:

$$R_0^* = e^{-\alpha} \tag{80}$$

If the correlation function is Eq. 76, then

$$R_0^* = R_0^{1/k} \tag{81}$$

and

$$\alpha^* N_0^* = \alpha N_0 \tag{82}$$

Therefore, (αN_0) does not depend on the N_0 value.

5. To use the presented graphs a rough estimate of $R(i)$ is sufficient. In hydrology, this estimation can be obtained from previous hydrologic studies, from general geophysical considerations, or from a pilot analysis of recorded subsamples.

6. Nowadays, important hydrologic magnitudes (e. g., rainfall depth and runoff) are often recorded using continuous measuring systems. For each basin, these records ore known for a time period with a given finite duration. Therefore, in hydrology, to estimate the mean and variance of a stationary continuous sample with a given finite duration is a common and fundamental problem. Often, the fractions of project work and cost that are required to carry out this estimation process are high because it is used repeatedly. Thus, improving this process has important scientific and economic effects. To solve this estimation problem the continuous sample must be discretized. Therefore, the decision variable is L, defined as the adopted discretization time interval. Then, improving this estimation process is achieved by studying the method of selecting L. Selecting L is making a compromisse between the estimation precision level and the required amount of work. Optimizing this decision implies obtaining the trade-off between measures of these two quantities. This relationship was derived herein and is presented in Figs. 1-7. These results can be applied easily to pratical hydrologic problems to avoid undesired precision levels as well as irrelevant increments of the estimation work.

ACKNOWLEDGMENT

This study was sponsored by the Calouste Gulbenkian Foundation through a research project directed by E. R. Arantes e Oliveira.

APPENDIX I — REFERENCES

[1] Box and Jenkins, *Time-Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, Calif., 1971.

[2] Fisher, R. A., *The Design of Experiments*, Oliver and Boyd, 1966.

[3] Yevjevich, V., *Stochastic Processes in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colo., 1972.

APPENDIX II — NOTATION

The following symbols are used in this paper:

A, B, C, D, E = real variables;
COVAR (a, b) = covariance of a and b;
$E()$ = expected value;
$f()$ = probality density function;
I = volume of information;
i = positive integer variable;
K, L, L_B, L_C, L_D = positive real variables;
LV_1, LV_2 = real variables;
N = positive integer variable;
N_0 = particular value of N;
$P_B, P_C, P_D, q_B, q_C q_D$ = positive real parameters;
R, R^* = positive real variables;
R_0 = particular value of R;
R_0^* = particular value of R^*;
$R(i)$ = value of autocovariance function of X for lag = i;
r_B, r_C, r_D = positive real parameters;
S_1, S_2, s_B, s_C, s_D = positive real parameters;
t, t', t_B, t_C, t_D = instants of time;
V_1, V_2 = real variables;
VAR () = variance;
X = real variable;
X_t = value of X at instant t;
α, α^* = positive real variables;
ε_t = random variable for instant t;
θ_1 = moving average real parameter;
μ = mean of X;
$\hat{\mu}$ = estimator of μ;
$\rho(a, b)$ = correlation coefficient between a and b;
$\rho(i)$ = value of correlation function of X for lag = i;
σ^2 = variance of X;
$\hat{\sigma}^2$ = estimator of σ^2; and
Φ_1, Φ_2 = regressive real parameters.